

MATEMÁTICA

PSS 2

Unidade 1

Progressões

Progressões aritméticas

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com uma constante, que é chamada **razão**. A razão é representada pela letra **r**.

→ Exemplo:

- a) a sequência (2, 5, 8, 11, ...) é uma progressão aritmética de razão $r = 3$;
- b) a sequência (3, 1, -1, -3, ...) é uma progressão aritmética de razão $r = -2$;
- c) a sequência (4, 4, 4, 4, 4, ...) é uma progressão aritmética de razão $r = 0$.

Cálculo da razão

A razão de uma progressão aritmética é a diferença entre qualquer termo e o seu anterior.

$$r = \text{termo qualquer} - \text{termo anterior}$$

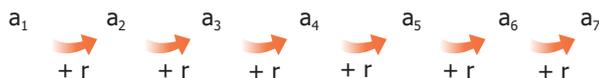
→ Exemplo:

A razão da progressão aritmética (400, 417, 434, 451, ...) pode ser assim calculada:

$$r = 417 - 400 = 17$$

Relação entre os termos

Em uma progressão aritmética, para "avançar" um termo somamos uma razão; para "avançar" dois termos, somamos duas vezes a razão, e assim sucessivamente.



→ Exemplo:

$$\begin{aligned} a_4 + r &= a_5 \\ a_4 + 2r &= a_6 \\ a_4 + 3r &= a_7 \end{aligned}$$

Apoio ao texto

1. Calcular o 8º, 20º e 100º termos da PA(2,6,10,...)

De forma geral, seguindo o raciocínio acima, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Em que:

- a_k** : termo de posição **k**;
- r**: razão;
- a_n** : termo de posição **n**.



2. (UFMS) A Amazônia Legal corresponde a mais da metade do território nacional, engloba oito estados inteiros e parte do estado do Maranhão. Entretanto, em 2022, sua população correspondia a pouco mais de um décimo da população brasileira.

Considere que o crescimento populacional da Amazônia Legal, entre os anos de 2012 e 2022, seja dado por uma progressão aritmética e que a população, nos referidos anos, tenha sido de 26,4 e 29,4 milhões, respectivamente.

Supondo que esse crescimento se mantenha nos próximos 10 anos, qual será, em milhões, a população da Amazônia Legal em 2030?

- a) 31,5
- b) 31,8
- c) 32,4
- d) 34,8
- e) 35,4

3. (ENEM) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça. Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R\$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é:

- a) R\$ 512.000,00.
- b) R\$ 520.000,00.
- c) R\$ 528.000,00.
- d) R\$ 552.000,00.
- e) R\$ 584.000,00.

Propriedades

Três termos consecutivos

Em uma PA, com exceção dos extremos, qualquer termo é igual à soma do termo anterior com o termo posterior dividida por 2.

$$\text{Se } a, b \text{ e } c \text{ estão em PA,} \\ \text{então } b = \frac{a + c}{2}.$$

→ Exemplo:

Na PA (2, 4, 6, 8, ...) temos:

$$4 = \frac{2 + 6}{2}; 6 = \frac{4 + 8}{2}; \dots$$

Soma dos termos da PA

Menino prodígio

Um fato curioso sobre o uso da fórmula que vamos apresentar ocorreu na Alemanha, por volta de 1787. O menino Carl Friedrich Gauss resolveu um problema de aritmética com uma rapidez fora do comum, principalmente para uma turma de escola na qual os alunos tinham, em média, 10 anos. O professor deu o seguinte problema para a turma:



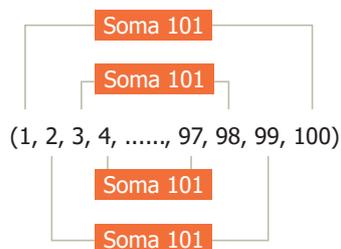
Gottlieb Biermann, 1867/IBID



“Escrevam todos os números de 1 até 100 e depois apurem quanto dá a sua soma.”

Gauss de pronto verificou que a soma era 5.050 e, em seu dialeto Braunschweig, disse “ligget se”, que pode ser traduzido como “aqui está”. Seus colegas ficaram resolvendo a questão por bastante tempo ainda e, ao final da aula, uma vez analisados os resultados, a maioria deles tinha errado a soma. Quanto a Gauss, acertou, é claro.

Vejam como ele pensou:



O menino viu 50 somas iguais a 101. Logo, raciocinou:

$$50 \text{ vezes } 101 = 5.050.$$

Gauss apresentou essa e muitas outras proezas durante toda a vida. Não poderia ser diferente: em uma escala de QI sugerida por Lewis Terman, foi atribuído a ele o QI 240, sendo que a faixa compreendida entre 90 e 120 corresponde a uma inteligência normal e, acima de 140, à genialidade. Foi, assim, um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Fórmula da soma

É possível somar os n primeiros termos de uma progressão aritmética a partir da fórmula abaixo.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Em que:

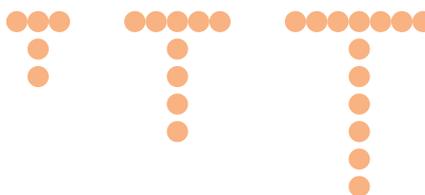
- a_1 : primeiro termo da PA;
- a_n : último termo que se quer somar;
- n : número de termos da soma.

→ Exemplo: $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2}$

Apoio ao texto

4. Calcule a soma dos 20 primeiros termos da PA (2, 5, 8, ...).

5. (UFSM) Tisiu ficou sem parceiro para jogar bolita (bola de gude); então pegou sua coleção de bolitas e formou uma sequência de “T” (a inicial de seu nome), conforme a figura



Supondo que o guri conseguiu formar 10 “T” completos pode-se, seguindo o mesmo padrão, afirmar que ele possuía

- a) mais de 300 bolitas.
- b) pelo menos 230 bolitas.
- c) menos de 220 bolitas.
- d) exatamente 300 bolitas.
- e) exatamente 41 bolitas.

6. (UFSM) Distribuem-se 105 bolas sobre linhas paralelas, com 1 bola na 1ª linha, 2 bolas na 2ª linha, 3 bolas na 3ª linha e assim por diante. Sabendo que não sobrar nenhuma bola, o número de linhas que serão formadas é:

- a) 11
- b) 12
- c) 13
- d) 14
- e) 15



Curiosidade

Vejamos a dedução da fórmula da soma:

A soma dos **n** primeiros termos de uma progressão aritmética pode ser escrita assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ (igualdade 1)}$$

Mas também pode ser escrita começando por a_n .

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \text{ (igualdade 2)}$$

Somando as duas igualdades, temos:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

n somas iguais a $(a_1 + a_n)$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Progressões geométricas

Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência, na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao seu anterior multiplicado por uma constante, que é chamada **razão**. A razão é representada pela letra **q**.

→ Exemplo:

a) a sequência (2, 6, 18, 54, ...) é uma progressão geométrica de razão $q = 3$;

b) a sequência (5, -10, 20, -40, ...) é uma progressão geométrica de razão $q = -2$;

c) a sequência (4, 4, 4, 4, 4, ...) é uma progressão geométrica de razão $q = 1$.

Cálculo da razão

A razão de uma progressão geométrica é o quociente entre qualquer termo e o seu anterior.

$$q = \frac{\text{termo qualquer}}{\text{termo anterior}}$$

→ Exemplo:

A razão da progressão geométrica (3, 12, 48, ...) pode ser assim calculada:

$$q = \frac{12}{3} = 4$$

Relação entre os termos

Em uma progressão geométrica, para avançar um termo multiplicamos uma razão; para avançar dois termos, multiplicamos duas vezes a razão e, assim, sucessivamente.



→ Exemplo:

$$a_4 \cdot q = a_5$$

$$a_4 \cdot q^2 = a_6$$

$$a_4 \cdot q^3 = a_7$$

De forma geral, seguindo o raciocínio acima, temos:

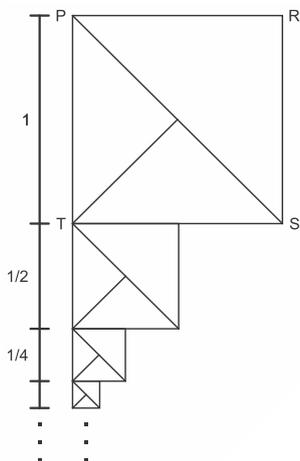
$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Apoio ao texto

7. Calcular o 8º e 100º termos da PG(2,4,8,...)



8. (ENEM) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente. Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$
- c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$
- d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$
- e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

Propriedades

Três termos consecutivos

Em uma PG, com exceção dos extremos, qualquer termo ao quadrado é igual ao produto do termo anterior pelo termo posterior.

Se a, b e c estão em PA,
então $b^2 = a \cdot c$.

→ Exemplo:

Na PG $(2, 6, 18, 54, \dots)$, temos:
 $6^2 = 2 \cdot 18$; $18^2 = 6 \cdot 54$; ...

Termo médio

Em uma PG com número ímpar de termos, o termo médio ao quadrado é igual ao produto dos extremos e, também, é igual ao produto de dois termos equidistantes dos extremos.

→ Exemplo:

Na progressão geométrica de sete termos que segue, temos o seguinte:

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)



Sendo TM o termo médio, decorre que:
 $TM^2 = 8^2 = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16$

Apoio ao texto

9. Se os números $x - 6, x - 4$ e x formam, nessa ordem, uma PG, calcule a razão dessa PG.



Soma dos termos da PG

Pedido de Sissa

Muitas vezes, somar termos de uma progressão geométrica pode ser no mínimo curioso.

Conta a lenda que o jogo de xadrez foi inventado na Índia para agradar o soberano rei Shirham. O súdito Sissa Ben Dahir foi o inventor desse jogo e, como recompensa, pediu ao rei algo aparentemente simples. Eis o pedido: quero 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e, assim, sucessivamente, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro do xadrez tem 64 casas, a quantidade total de grãos de trigo que o servo pediu era exatamente igual à soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica 1, 2, 4, 8, ...

O interessante é que o resultado dessa soma é o estrondoso número 18.446.744.073.709.551.615. O professor Geraldo Ávila, da Unicamp, em 1992, fez algumas considerações sobre esse número em seu livro *Introdução às funções e à derivada*. O autor cita a produção brasileira de trigo em 1992, a produção mundial de trigo nesse mesmo ano e coloca ainda outros dados curiosos. Conclusão: afirma o professor que a produção de trigo, desde o início da agricultura até 1992, não seria suficiente para atender ao pedido de Sissa.



Fórmula da soma

É possível somar os n primeiros termos de uma progressão geométrica a partir da fórmula abaixo.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Em que:

- a_1 : primeiro termo da PA;
- q : razão;
- n : número de termos da soma.

→ Exemplo: $S_7 = \frac{a_1 \cdot (q^7 - 1)}{q - 1}$

Apoio ao texto

10. (UFMS) Um pintor foi contratado para pintar uma casa nos dez dias que antecedem o Natal. O dono da casa ofereceu R\$ 2,00 no 1º dia e, nos dias seguintes, o dobro do que o pintor recebera no dia anterior. O pintor recusou a proposta. Se ele tivesse aceitado, ele receberia pelos 10 dias de trabalho:

- a) R\$ 110,00
- b) R\$ 220,00
- c) R\$ 1024,00
- d) R\$ 2046,00
- e) R\$ 2048,00

Limite da soma

O limite da soma dos termos de uma PG infinita, com $-1 < q < 1$, é dado por:

$$\lim S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Em que:

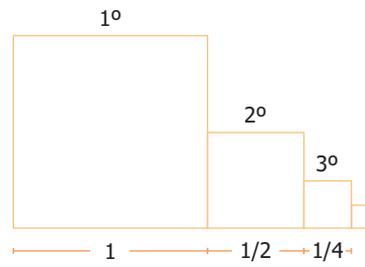
- a_1 : primeiro termo da progressão geométrica;
- q : razão da progressão.

Apoio ao texto

11. Calcule o limite da soma dos termos da PG (4, 2, 1, ...).

12. (UFSM) Na figura, o lado do primeiro quadrado é 1 e cada quadrado, a partir do segundo, tem lado igual à metade do lado do seu antecessor. Supondo que essa sequência continue indefinidamente, a soma das áreas dos infinitos quadrados é igual a:

- a) $5/4$.
- b) $4/3$.
- c) 2.
- d) $5/2$.
- e) 3.



Anotações:



Trigonometria I

Origem da trigonometria



Adaptado por Mariana Xavier de Oliveira

Historiadores da matemática acreditam que o início do desenvolvimento da trigonometria tenha ocorrido no mundo antigo, com os egípcios e babilônios, por volta do século IV ou V a.C., período em que as necessidades práticas geradas pelas medições de terras, pela astronomia e pelas navegações ficaram evidentes nos documentos históricos desses dois povos. A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo; hoje, porém, sabemos que essa parte da matemática não é apenas estudada nos triângulos, mas também nos círculos, nas esferas, etc.

Mesmo que o início da trigonometria tenha ocorrido cinco séculos antes de Cristo, foi somente por volta de 180 a 125 a.C. que um homem recebeu os méritos da criação. Trata-se do astrônomo Hiparco de Niceia, que é reconhecido como “o pai da trigonometria”. O que deve ter sido a primeira tábua trigonométrica é obra de Hiparco. Ele foi além: colaborou com o melhoramento de dados astronômicos que possibilitaram conhecer melhor a duração do mês e do ano. Descobriu também a precessão dos equinócios.

Entretanto, foi Ptolomeu de Alexandria (150 d.C.), considerado o maior astrônomo da Antiguidade, que escreveu a obra mais importante contendo aplicações da trigonometria. Com 13 livros, a obra “Syntaxis Mathematica” foi chamada, na Arábia, de “Almagesto”, que significa “o maior”. Para entender a grandiosidade do “Almagesto”, basta dizer que, durante seis séculos, essa obra foi guia de consulta para astrônomos do mundo inteiro.

Por volta de 400 anos d.C., surgiram novos personagens nessa curiosa história: os hindus (ou indianos). Esse povo promoveu grande desenvolvimento na trigonometria. Enquanto os gregos mantinham uma trigonometria apenas geométrica, os hindus propuseram uma trigonometria de natureza aritmética. Criou-se, então, entre os matemáticos árabes, uma bipolarização entre as trigonometrias grega e hindu. O conflito só terminou entre 850 e 929, quando o matemático árabe Al-Battani adotou a trigonometria hindu, introduzindo a ideia de se trabalhar com um círculo de raio unitário.

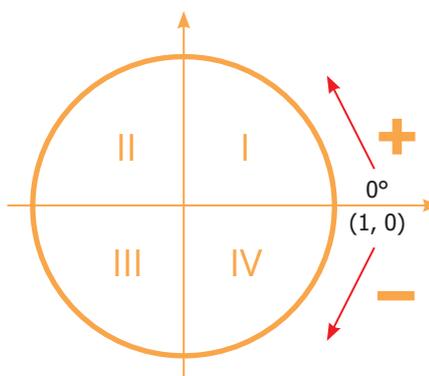
Já na Idade Moderna, foi a vez de o Ocidente colaborar com o desenvolvimento da trigonometria. De necessidades, como a Cartografia (devido à expansão marítima) e a Topografia, surgiram inovações nessa área.

Hoje, porém, estudamos uma trigonometria simbólica e um pouco diferente daquela a que fizemos referência até o parágrafo anterior. A atual trigonometria é o resultado de uma longa caminhada da humanidade que um dia construiu as pirâmides egípcias, calculou a medida do raio da Terra, fez medições inacessíveis e depois assistiu à criação da simbologia atual da matemática.

Circunferência trigonométrica

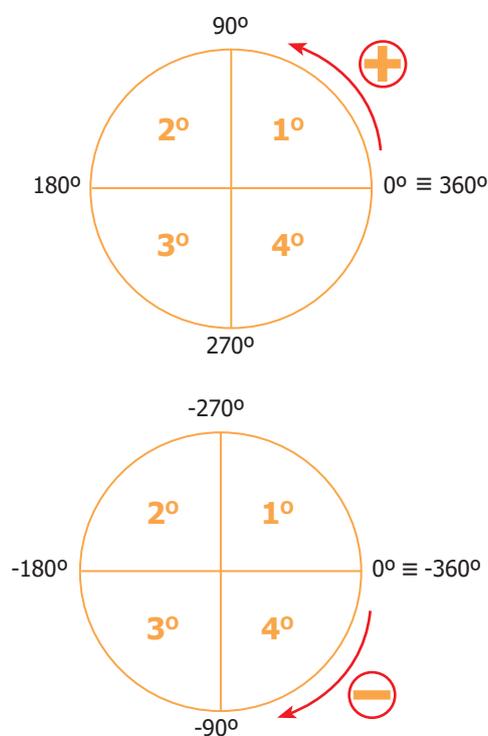
A circunferência trigonométrica pode ser compreendida como uma circunferência traçada no plano cartesiano (conforme a figura ao lado), com as seguintes propriedades:

- ▶ o raio é unitário;
- ▶ adota-se como origem dos arcos o ponto (1, 0);
- ▶ possui dois sentidos para os arcos: o sentido anti-horário, que é convençãoado como positivo, e o sentido horário, que é o sentido negativo;
- ▶ é dividida em quadrantes, numerados conforme a figura ao lado.

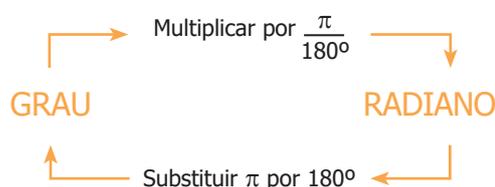


Medida de arcos

Graus



Transformação de arcos

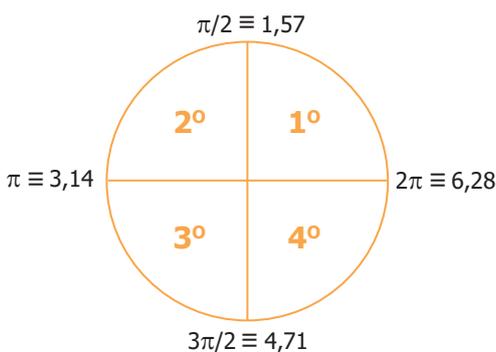


Apoio ao texto

1. (ENEM) Nos *X-Games Brasil*, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade *skate* vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:

- uma volta completa.
- uma volta e meia.
- duas voltas completas.
- duas voltas e meia.
- cinco voltas completas.

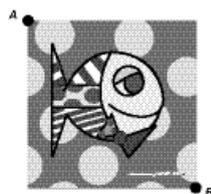
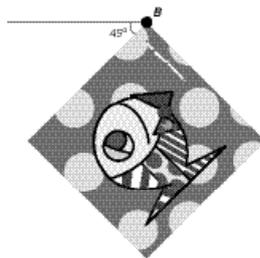
Radianos



2. (ENEM) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprende, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.



A ●



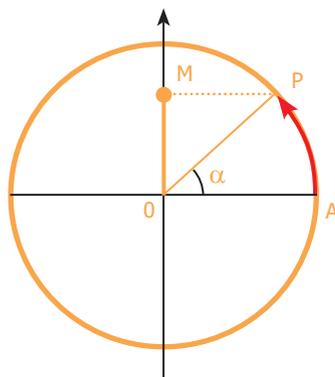
Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

- a) 90° no sentido horário.
- b) 135° no sentido horário.
- c) 180° no sentido anti-horário.
- d) 270° no sentido anti-horário.
- e) 315° no sentido horário.

Seno

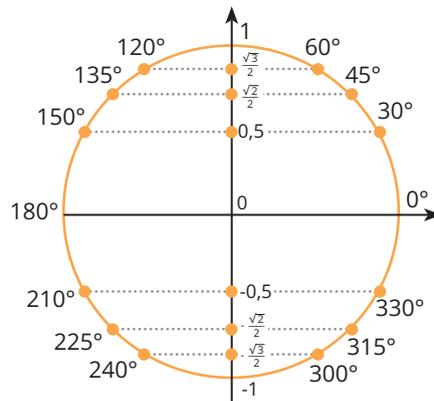
No sistema de coordenadas cuja origem é o centro da circunferência trigonométrica e o ponto A = (1, 0) é a origem dos arcos, definimos o $\text{sen } \alpha$ como a **ordenada** (valor do y) do ponto P, como indicado na figura abaixo.

Representação geométrica



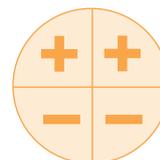
$\text{sen } \alpha = M$

Seno



Compreendendo o conceito de seno (na verdade não se trata de uma nova definição de seno, mas, sim, um modelo físico que também permitirá o estudo do seno para arcos maiores que 180°), podemos tirar conclusões imediatas da circunferência trigonométrica, sem a necessidade de decorá-las. Vejamos:

Sinal



Variação

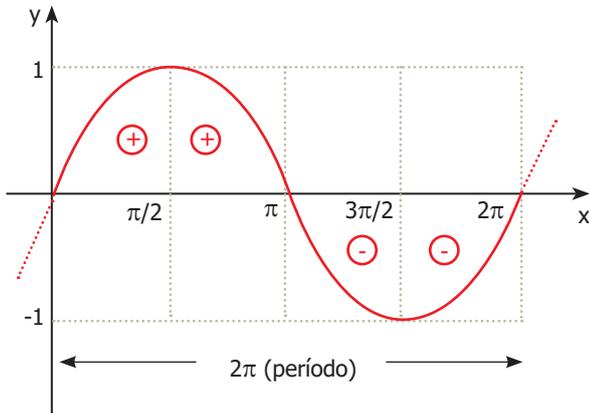
$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$

Função seno

$f(x) = \text{sen } x$

x	f(x) = sen x
-90°	
0°	
90°	
180°	
270°	
360°	

Gráfico (senoide)



$$D_{(f)} = \mathbb{R}$$

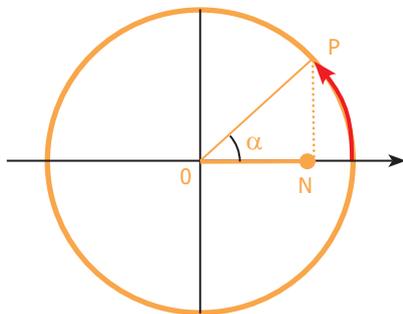
$$\text{Im}_{(f)} = [-1, 1]$$

Cosseno

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro da circunferência trigonométrica e o ponto $A = (1, 0)$ é a origem dos arcos, definimos o $\cos \alpha$ como a **abscissa** (valor do x) do ponto P , como indicado na figura abaixo.

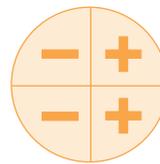
Aqui, de modo análogo ao que vimos para o seno, compreendendo o conceito de cosseno, podemos tirar conclusões imediatas da circunferência trigonométrica, sem a necessidade de decorá-las. Vejamos:

Representação geométrica



$$\cos \alpha = N$$

Sinal

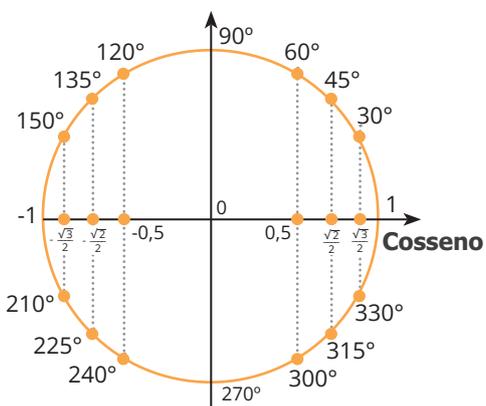


Variação

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Função cosseno

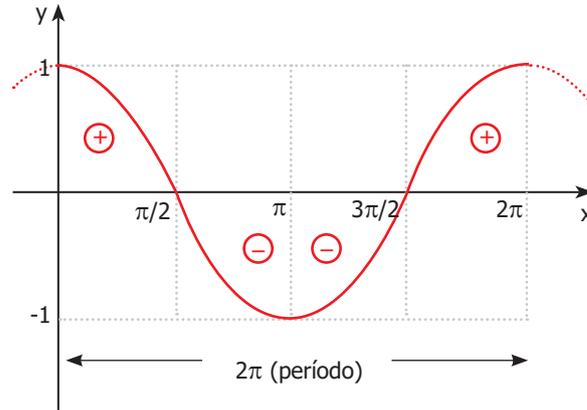
$$f(x) = \cos x$$



x	f(x) = cos x
-90°	
0°	
90°	
180°	
270°	
360°	



Gráfico (cossenoide)



$$D_{(f)} = \mathbb{R}$$

$$Im_{(f)} = [-1, 1]$$

Funções Trigonométricas

$$f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$$

OU

$$f(x) = a + b\text{cos}(cx + d)$$

Período

Dadas as funções:

$$f(x) = \text{sen}(cx) \quad \text{e} \quad f(x) = \text{cos}(cx)$$

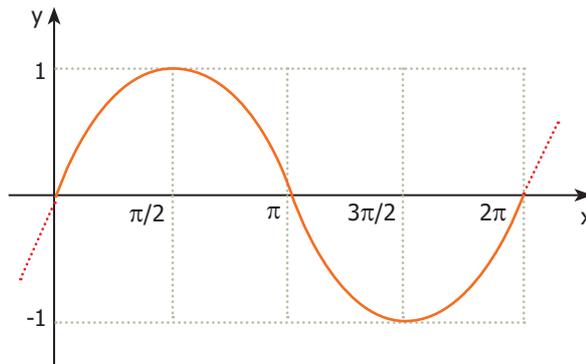
$$p = \frac{2\pi}{c}$$

Imagem

Gráfico

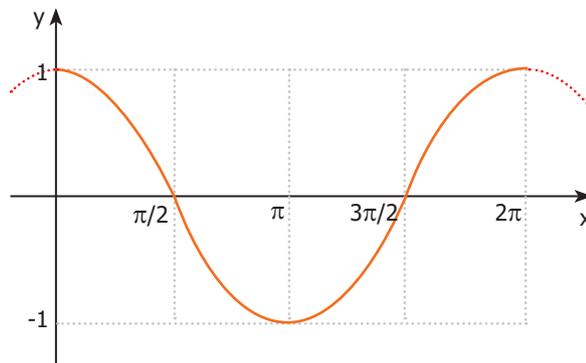
Função Seno

$$f(x) = \text{sen } x$$



Função Cosseno

$$f(x) = \text{cos } x$$



Apoio ao texto

3. Calcule a imagem, o período e esboce o gráfico da função

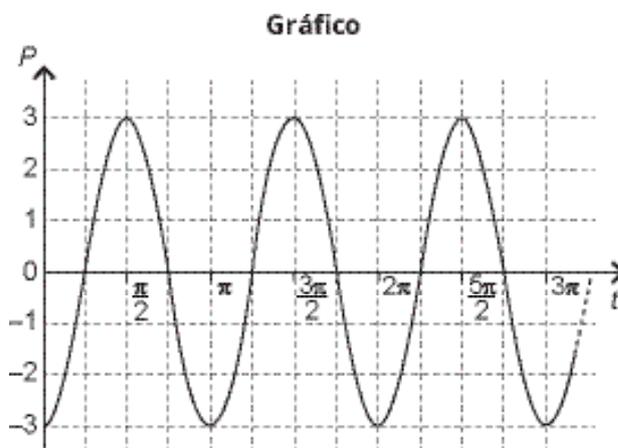
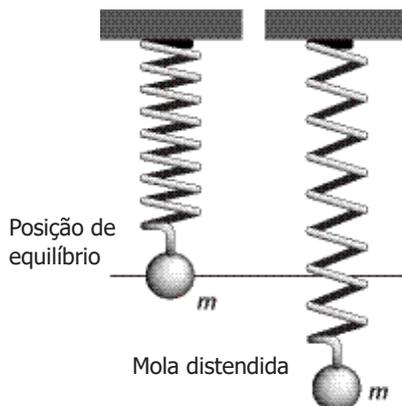
$$f(x) = 3 + 2\text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$$

4. (UFRGS) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5\text{sen}(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente:

- a) $-2, 8, \pi$.
- b) $8, -2, \pi$.
- c) $\pi, -2, 8$.
- d) $\pi, 8, -2$.
- e) $8, \pi, -2$.



5. (ENEM-2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A \sin(\omega t)$ em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



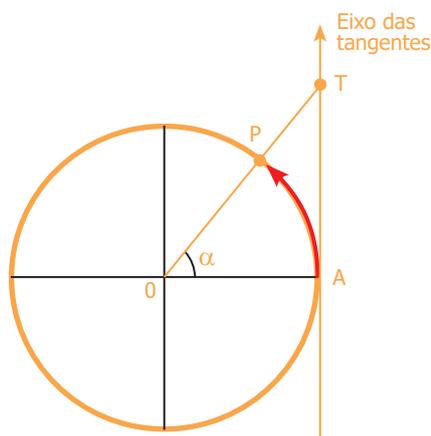
A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m , ao longo do tempo, no gráfico, é:

- a) $-3 \cos(2t)$
- b) $-3 \sin(2t)$
- c) $3 \cos(2t)$
- d) $-6 \cos(2t)$
- e) $6 \sin(2t)$

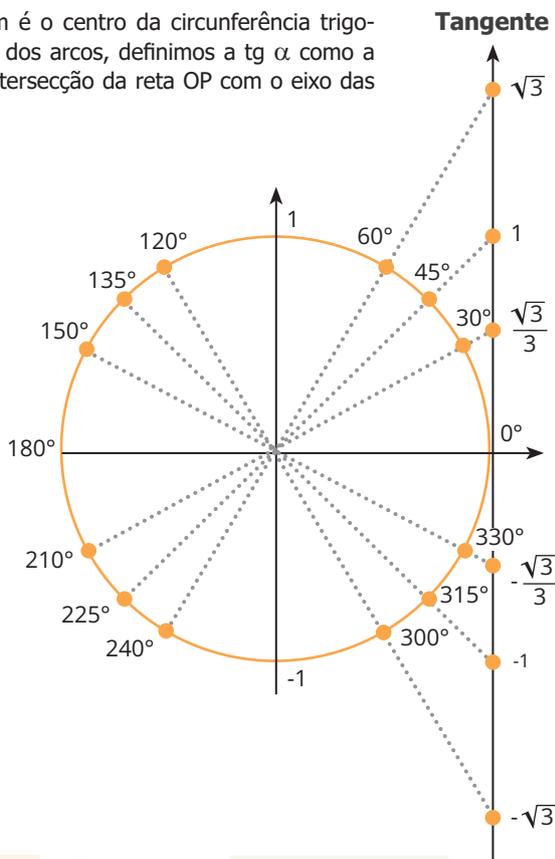
Tangente

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro da circunferência trigonométrica e o ponto $A = (1, 0)$ é a origem dos arcos, definimos a $\text{tg } \alpha$ como a **ordenada** do ponto T , obtido a partir da intersecção da reta OP com o eixo das tangentes, indicado na figura abaixo.

Representação geométrica



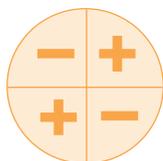
$\text{tg } \alpha = T$



Valores

$\text{tg } 0^\circ = 0$	$\text{tg } 270^\circ = \text{indeterminado}$
$\text{tg } 90^\circ = \text{indeterminado}$	$\text{tg } 360^\circ = 0$
$\text{tg } 180^\circ = 0$	

Sinal



Variação

O resultado da tangente de um arco não está limitado entre -1 e 1, como acontece com o seno e o cosseno. Esse resultado pode ser qualquer valor real.

Função tangente

$f(x) = \text{tg}(mx)$

Período

$P = \pi/m$

Domínio

$\text{arco} \neq \pi/2 + k\pi$

Apoio ao texto

6. Determine o período e o domínio da função definida abaixo:

$f(x) = 2 + \text{tg}\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$

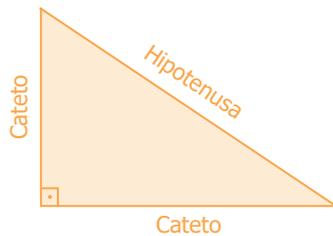
Período

Domínio

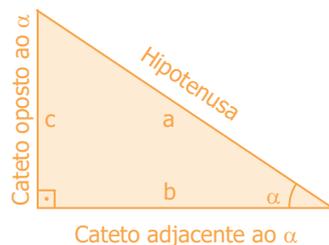


Triângulo retângulo

Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, definimos as seguintes razões trigonométricas:



Tem um ângulo de 90° .



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto ao } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente ao } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto ao } \alpha}{\text{Cateto adjacente ao } \alpha}$$

Sendo $\alpha + \beta = 90^\circ$, têm-se as seguintes relações:

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta \quad \text{e} \quad \text{tg } \alpha = 1/\text{tg } \beta$$

Valores usuais em prova

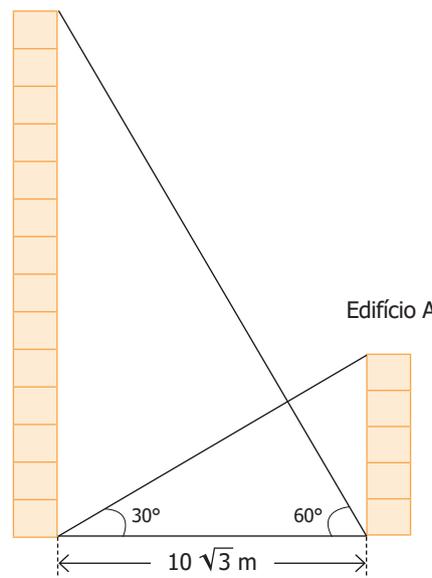
	Ângulos	30°	45°	60°
Valores	Valor do seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Valor do cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	Valor da tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Apoio ao texto

7. (UFSM) Um observador, com o auxílio de um teodolito (instrumento utilizado para medir ângulos), mede inicialmente o ângulo do pé do edifício A ao topo do edifício B, como apresenta a figura. Após, mede o ângulo do pé do edifício B ao topo do edifício A. Sabendo-se que a distância entre os dois edifícios é de $10\sqrt{3}$ m, pode-se afirmar que:

- I. a soma das alturas do edifício A e do edifício B é de 40 m.
- II. a distância entre os topos dos edifícios é de $10\sqrt{7}$ m.
- III. a altura do edifício A é de 30m.

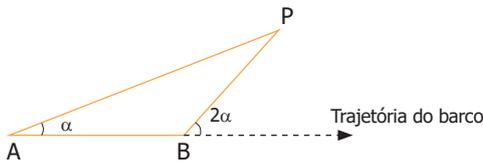
Edifício B



Está(ao) correta(s) a(s) afirmativa(s):

- a) I apenas
- b) II apenas
- c) I e II apenas
- d) III apenas
- e) I, II e III

8. (ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α . A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000\text{m}$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

- a) 1000 m
- b) $1000\sqrt{3}$ m
- c) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
- d) 2000 m
- e) $2000\sqrt{3}$ m

9. Uma árvore, partida pelo vento, mantém seu tronco perpendicularmente ao solo, formando um triângulo retângulo. Se a parte quebrada faz ângulo de 60° com o solo e se o topo da árvore está agora distanciado 10 m de sua base, qual era aproximadamente a altura original da árvore?

- a) 20 m
- b) $10\sqrt{3}$ m
- c) $40\sqrt{3}$ m
- d) $10(2 + \sqrt{3})$ m
- e) $20(1 + \sqrt{3})$ m

Anotações:

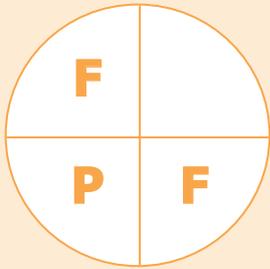




Redução ao 1º quadrante

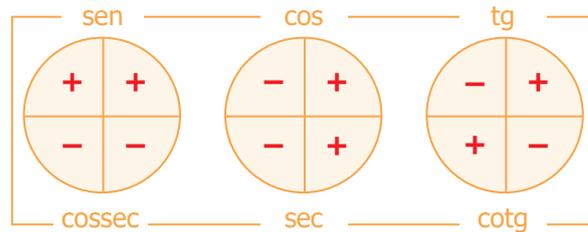
Para reduzir um arco qualquer pertencente ao 2º, 3º e 4º quadrantes a um correspondente arco no 1º quadrante, com o mesmo valor da razão trigonométrica (em módulo), faz-se o seguinte:

- ▶ 1. localize o quadrante em que está o arco a ser reduzido;
- ▶ 2. verifique o sinal da razão trigonométrica no referido quadrante;
- ▶ 3. faça a redução do arco conforme abaixo.



2º = Quanto falta para 180º.
 3º = Quanto passou de 180º.
 4º = Quanto falta para 360º.

Sinais nos quadrantes



Razões trigonométricas

	Ângulos	30º	45º	60º
Valores	Valor do seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Valor do cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	Valor da tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Apoio ao texto

10. Determine o valor de:

a) $\cos 135^\circ$

b) $\sin 210^\circ$

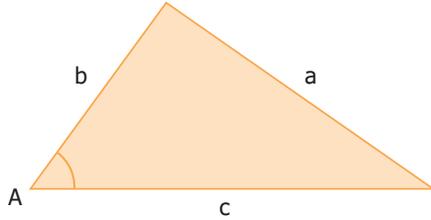
c) $\operatorname{tg} 300^\circ$

Triângulos quaisquer

Na resolução de problemas em triângulos quaisquer, aplicaremos duas leis importantes:

Lei dos cossenos

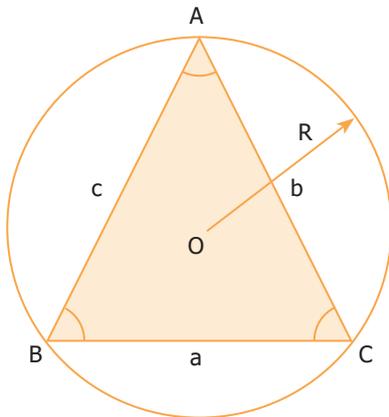
Normalmente, utiliza-se a lei dos cossenos quando são fornecidos dois lados e um ângulo.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Lei dos senos

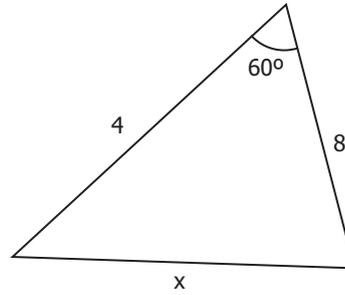
Normalmente, utiliza-se a lei dos senos quando são fornecidos dois ângulos e um lado do triângulo.



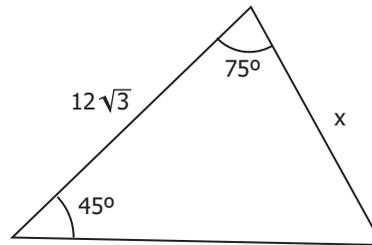
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Apoio ao texto

11. Calcule x no triângulo.



12. Calcule x no triângulo.



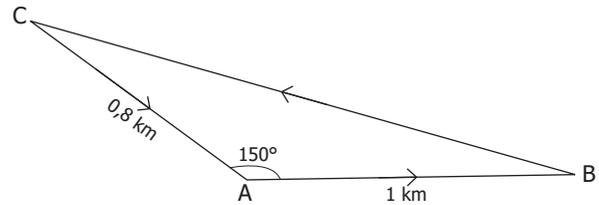


13. (UFSM) A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhoria da qualidade de vida. Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura.

Dado: $\sqrt{3} = 1,7$

Quantos quilômetros ela terá caminhado, se percorrer todo o trajeto?

- a) 2,29.
- b) 2,33.
- c) 3,16
- d) 3,50
- e) 4,80.



Operações com arcos

Questões que envolvem os ângulos 15°, 75°, 105° etc.

Adição e subtração de arcos

As fórmulas abaixo possibilitam o cálculo do seno, do cosseno e da tangente de diversos ângulos a partir dos ângulos de 30°, 45° e 60°. É o caso do seno de 15° e do seno de 75°, por exemplo, que podem ser obtidos do seguinte modo:

- ▶ $\text{sen } 15^\circ = \text{sen } (45^\circ - 30^\circ)$
- ▶ $\text{sen } 75^\circ = \text{sen } (45^\circ + 30^\circ)$

Vejamos as fórmulas:

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \cos a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen } b$$

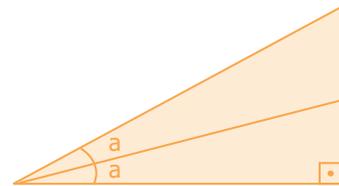
$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

$$\text{tg } (a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Questões que envolvem o que chamamos de "arco duplo"



Duplicação de arcos

Outro recurso para obter o seno, o cosseno e a tangente de diversos arcos é a relação de **arco duplo**. Por exemplo, a partir da tangente de 5°, você pode chegar à tangente de 10°, 20°, 40° e assim por diante.

Vejamos as identidades:

$$\text{sen } (2a) = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$$

$$\cos (2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\text{tg } (2a) = \frac{2 \cdot \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Importante

As fórmulas acima podem ser deduzidas a partir das fórmulas da adição de arcos. Acompanhe o cálculo no caso do seno:

$$\begin{aligned} \text{sen}(2a) &= \text{sen}(a + a) = \\ &= \text{sen } a \cdot \cos a + \cos a \cdot \text{sen } a = \\ &= 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a \end{aligned}$$

A dedução do cosseno e da tangente do arco **2a** fica a cargo de cada estudante.

Apoio ao texto

14. Calcule:

a) $\text{sen } 105^\circ$

b) $\text{sen } (\pi + x)$

15. (UFSM) O pioneiro do abstracionismo nas artes plásticas, Wassily Kandinsky, nasceu em Moscou, em 1866. Optou inicialmente pela música, o que refletiu em seu trabalho como pintor, conferindo-lhe noções essenciais de harmonia. A figura a seguir, adaptada de um quadro de Kandinsky, apresenta um triângulo ABC retângulo em A.



Sabendo-se que a diferença entre os ângulos x e y é 60° , o valor de $\text{sen } x + \text{sen } y$ é:

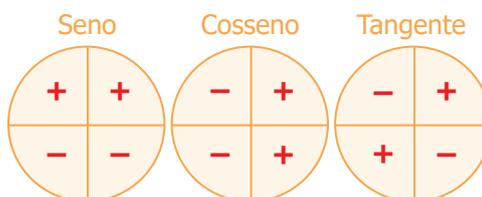
- a) $\frac{1}{2}$.
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Equações trigonométricas

Na resolução de uma equação trigonométrica, tenha em mente:

	Ângulos	30°	45°	60°
Valores	Valor do seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Valor do cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	Valor da tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Sinal



Apoio ao texto

16. Determine a solução geral das equações abaixo:

a) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

b) $\text{cos } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. (UFSM) Em certa região, a temperatura média mensal, em $^\circ\text{C}$, varia de acordo com a lei $f(t) = 20 + 8\cos\frac{\pi}{6}(t - 1)$, em que t é medido em mês, $t = 1$ corresponde ao mês de janeiro e $t = 2$, ao mês de fevereiro, e assim por diante.

Assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas.

- () A temperatura média mensal máxima é de 28°C
- () O período da função $y = f(t)$ é igual a 6
- () A temperatura média mensal é igual a 16°C nos meses de maio e setembro.
- () A temperatura média mensal mínima é de 12°C .

A sequência correta é:

- a) V - F - F - V
- b) V - V - F - F
- c) V - F - V - V
- d) F - F - V - F
- e) F - V - V - F



Introdução à Análise Combinatória

A análise combinatória visa desenvolver estratégias para contar o número de agrupamentos que são formados com os elementos de um conjunto, agrupados sob certas condições. É uma área da matemática que estimula o pensar mediante a resolução de problemas.

Conta a história que Arquimedes, há 2200 anos, escreveu um tratado sobre o assunto, chamado *Stomachion*. Entretanto, o desenvolvimento significativo dessa parte da matemática ocorreu somente 1700 anos depois, com o italiano Niccolò Fontana (1500-1557), conhecido por Tartaglia, e os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

Fatorial

É o produto dos números naturais desde o número dado até 1. A notação **n!** representa o fatorial do número **n** e foi introduzida, em 1808, por Christian Kramp.

→ Exemplos:

- a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- d) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- e) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

Por definição: $0! = 1$
 $1! = 1$

Apoio ao texto

1. Simplifique as expressões:

- a) $\frac{10!}{8!}$
- b) $\frac{9!}{7!}$

Tipos de agrupamentos

Ordem

Dois agrupamentos, com o mesmo número de elementos, diferem entre si pela **ordem** quando possuem os mesmos elementos colocados em uma diferente ordem.

→ Exemplo: AB e BA.

Natureza

Dois agrupamentos, com o mesmo número de elementos, diferem entre si pela **natureza** quando possuem pelo menos um elemento diferente.

→ Exemplo: AB e AC.

Arranjos simples

São agrupamentos de elementos diferentes que diferem entre si pela **ordem** ou pela **natureza** dos seus elementos.

→ Exemplo: Formar todos os arranjos simples das letras A, B e C duas a duas.

AB	CA
BA	BC
AC	CB

Permutações simples

São agrupamentos de elementos diferentes que diferem entre si **apenas** pela **ordem** dos seus elementos.

→ Exemplo: Formar todas as permutações simples das letras A, B e C.

ABC	BAC
ACB	CAB
BCA	CBA



Combinações simples

São agrupamentos de elementos diferentes que diferem entre si **apenas** pela **natureza** dos seus elementos.

→ **Exemplo:** Formar todas as combinações simples das letras A, B e C duas a duas.

AB

AC

BC

Apoio ao texto

2. Calcule:

a) A_6^3

b) A_8^4

3. Calcule:

a) P_4

b) P_6

4. Calcule:

a) C_8^3

b) C_9^4

Problemas de Análise Combinatória

Resolver problemas de contagem é algo que exige uma boa interpretação da situação descrita pelo problema e, também, certa dose de criatividade. Muitas vezes, para resolver uma questão, mais de um caminho poderá ser adotado.

Na lista abaixo, apresentamos questões diversas de análise combinatória sem indicar a que tipo de agrupamento se referem, pois é assim que elas aparecem nos processos seletivos para nível superior. Nas resoluções, você deverá observar primeiro qual é o tipo de agrupamento que se está formando. A dica é ver se a **ordem** dos elementos é ou não relevante. Caso seja, então trata-se de arranjos ou permutações, e, se não for, de combinações.

n → número de elementos disponíveis a serem agrupados;

p → número de elementos em cada agrupamento.

Arranjo → $AB \neq BA$; $n \neq p$.

Permutação → $AB \neq BA$; $n = p$.

Combinação → $AB = BA$; $n \geq p$.

Resumo

- ▶ **Ordem influi:** arranjos ou permutações.
- ▶ **Ordem não influi:** combinações.

Para definir entre arranjo e permutação, verifique se entram todos os elementos dados no agrupamento que se quer formar. Se isso ocorrer, trabalhe com as permutações, caso contrário, trabalhe com os arranjos.



Apoio ao texto

5. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
6. Quantas comissões de 3 pessoas podemos formar com 10 pessoas?
7. Quantas saladas de frutas com 2 frutas diferentes podemos formar a partir de 4 frutas diferentes?
8. Uma empresa tem 6 sócios. De quantos modos podemos organizar entre esses sócios uma diretoria formada por um presidente, um secretário e um tesoureiro?
9. De quantos modos podemos arrumar 5 livros distintos em uma estante?
10. Quantos números de 3 algarismos distintos, iniciando por 4, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
11. Quantos números **pares** de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
12. Chamamos de **anagrama** de uma palavra dada qualquer palavra com ou sem sentido que é formada pelas mesmas letras da palavra dada. Desse modo, calcule quantos anagramas tem a palavra Amor.



- 13.** Quantos anagramas da palavra "SENADOR":
- a) começam por "S" e terminam por "R"?
- b) começam por vogal?
- 14.** Em uma festa, as 6 pessoas presentes cumprimentaram-se entre si apenas uma vez. Quantos apertos de mão houve na festa?
- 15.** Quantas comissões de 3 estudantes e 2 professores podemos formar com 4 estudantes e 3 professores?
- 16.** Com as letras A, B, C, D e E e os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantas placas de automóveis podemos formar com 3 letras distintas e 4 algarismos distintos?

Importante

Até agora, resolvemos apenas problemas da análise combinatória **simples**, que é a parte desse conteúdo em que os agrupamentos envolvidos **não apresentam repetição** de elementos. Para calcular o número de permutações com repetição, resolva os problemas usando as informações que seguem.

Permutações com repetição

São permutações em que pelo menos um elemento aparece mais de uma vez. Para calcular o número de permutações em situações desse tipo, use a seguinte fórmula:

$$P_n^{\alpha, \beta} = \frac{P_n}{P_\alpha \cdot P_{\beta \dots}}$$

Em que:

α = número de vezes que um elemento que se repete aparece;

β = número de vezes que um outro elemento que se repete aparece;

P_n = permutação dos n elementos a serem permutados;

P_α = permutação de α ;

P_β = permutação de β .



17. (UFSM) Para cuidar da saúde, muitas pessoas buscam atendimento em cidades maiores onde há centros médicos especializados e hospitais mais equipados. Muitas vezes, o transporte até essas cidades é feito por *vans* disponibilizadas pelas prefeituras. Em uma *van* com 10 assentos, viajarão 9 passageiros e o motorista. De quantos modos distintos os 9 passageiros podem ocupar suas poltronas na *van*?

- a) 4.032.
- b) 36.288.
- c) 40.320.
- d) 362.880.
- e) 403.200.

18. (UFSM) As doenças cardiovasculares aparecem em primeiro lugar entre as causas de morte no Brasil. As cirurgias cardíacas são alternativas bastante eficazes no tratamento dessas doenças. Supõe-se que um hospital dispõe de 5 médicos cardiologistas, 2 médicos anestesistas e 6 instrumentadores que fazem parte do grupo de profissionais habilitados para realizar cirurgias cardíacas. Quantas equipes diferentes podem ser formadas com 3 cardiologistas, 1 anestesista e 4 instrumentadores?

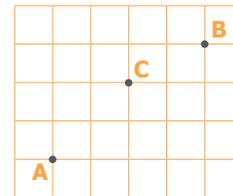
- a) 200.
- b) 300.
- c) 600.
- d) 720.
- e) 1.200.

19. (ENEM) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão:

- a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$
- b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$
- c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$
- d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$
- e) $\frac{21!}{7!14!}$

20. Calcule quantos anagramas tem a palavra Gauss.

21. (ENEM) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita ou para cima segundo o esquema da figura. O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é:

- a) 4.
- b) 14.
- c) 17.
- d) 35.
- e) 48.

22. Quantos números de 2 algarismos podemos formar com os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7?



Importante

Até agora, resolvemos problemas de análise combinatória simples e de permutação com repetição. A partir deste ponto, vamos resolver problemas que envolvem agrupamentos com elementos que podem se repetir. Nestes casos, então, usaremos o princípio fundamental da contagem.

Princípio fundamental da contagem

"Se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada essa decisão, uma outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as duas decisões é x vezes y ."

► Lembrete

O princípio acima pode ser utilizado também na resolução dos problemas da análise combinatória simples.

23. Dados os algarismos 2, 3, 4, 5, 7, 8 e 9, pergunta-se:

a) Quantos números de 4 algarismos, iniciando por 3, podemos formar?

b) Quantos números de 4 algarismos, não iniciando por 8, podemos formar?

24. (UFSM) No código Morse, as "letras" são ponto e traço. Pode-se afirmar que o número de palavras de até 5 "letras" que podem ser formadas, é igual a:

- a) 10
- b) 20
- c) 32
- d) 41
- e) 62

25. (ENEM) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.

Por exemplo, a letra **A** é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é:

- a) 12
- b) 31
- c) 36
- d) 63
- e) 720

26. (ENEM) O sistema de segurança de um laboratório utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura.



O número de senhas com 4 dígitos, as quais não iniciam com o dígito zero é dado por:

- a) 648
- b) 1080
- c) 5040
- d) 6480
- e) 9000



Probabilidade

A teoria das probabilidades originou-se do estudo dos jogos de azar, como o jogo de cartas, a roleta, o dado, etc. Essa teoria desenvolveu-se nos últimos séculos e é básica para o estudo da estatística, grandemente aplicada nas ciências exatas, humanas e biológicas. Por meio dela, estudam-se as chances de um experimento (experiência) aleatório ocorrer.

O que é um experimento aleatório?

É o experimento que, repetido várias vezes nas mesmas condições, apresenta resultados imprevisíveis. O resultado de um experimento aleatório depende exclusivamente do acaso. São exemplos:

- ▶ jogar uma moeda e observar a face voltada para cima;
- ▶ lançar um dado, cujas faces estão numeradas de 1 a 6, e observar a face voltada para cima;
- ▶ adivinhar o resultado de um jogo de futebol;
- ▶ prever o sexo de uma criança ao nascer;
- ▶ extrair uma carta de um baralho;
- ▶ sortear uma das 60 dezenas da Mega-Sena.

Espaço amostral

Chama-se espaço amostral de um experimento aleatório o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

O espaço amostral será representado por S e o seu número de elementos por $n(S)$.

→ Exemplos:

1º experimento: Lançar um dado de faces numeradas de 1 a 6 e observar a face voltada para cima.

Temos: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(S) = 6$.

2º experimento: Lançar uma moeda que tem em uma face cara e na outra face coroa e observar a figura da face voltada para cima. Vamos representar cara por C e coroa por K.

Temos: $S = \{\text{cara, coroa}\} = \{C, K\}$ e $n(S) = 2$.

3º experimento: Lançar simultaneamente um dado e uma moeda e observar a face voltada para cima do dado e a face voltada para cima da moeda.

Temos: $S = \{(1, C), (1, K), (2, C), (2, K), (3, C), (3, K), (4, C), (4, K), (5, C), (5, K), (6, C), (6, K)\}$ e $n(S) = 12$.

Evento

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Os eventos de um espaço amostral são representados pela letra $E...$ etc., e o número de seus elementos por $n(E)$.

→ Exemplos:

Consideremos o experimento "jogar um dado e observar o número da face voltada para cima". O seu espaço amostral é:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Consideremos alguns eventos desse espaço amostral:

▶ **Evento 1:** A face voltada para cima apresenta um número par.

Temos: $E = \{2, 4, 6\}$ e $n(E) = 3$.

▶ **Evento 2:** A face voltada para cima apresenta um número menor que 5.

Temos: $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $n(E) = 4$.

▶ **Evento 3:** A face voltada para cima apresenta um número par e primo.

Temos: $E = \{2\}$ e $n(E) = 1$.

Quando o evento é formado por um único elemento ele é chamado **evento simples** ou **evento elementar**. Portanto, o evento 3, como só tem um elemento, é um evento simples ou elementar.

Probabilidade

Considere S o espaço amostral de um experimento aleatório e E um evento desse espaço amostral. Suponhamos que cada elemento desse espaço amostral tenha a mesma chance de ocorrer. Vamos então chamá-lo de espaço amostral equiprovável ou uniforme.

A probabilidade do evento E ocorrer é representada por $P(E)$, conforme a seguir:

$$P(E) = \frac{\text{número de vezes que o evento } E \text{ pode ocorrer}}{\text{número de resultados possíveis do experimento}}$$

Mas, como o número de vezes que o evento A pode ocorrer é o número de elementos do evento A ; e o número de resultados possíveis do experimento é o número de elementos do seu espaço amostral, podemos, também, definir a probabilidade do evento A ocorrer, assim:

$$P(E) = \frac{\text{número de elementos do evento } E}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

Ou ainda:

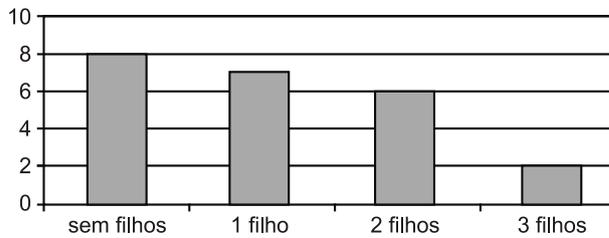
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Apoio ao texto

- No lançamento de uma moeda, qual a probabilidade de obtermos na face voltada para cima uma coroa?
- No lançamento de um dado, qual a probabilidade de obtermos na face voltada para cima um número menor que 5?
- No lançamento simultâneo de duas moedas, qual a probabilidade de obtermos pelo menos uma cara?
- No lançamento simultâneo de dois dados, qual a probabilidade de obtermos a soma dos números de cada dado igual a 9?
- Em uma urna estão 10 bolas brancas, 8 verdes e 2 pretas. Se uma bola é retirada ao acaso, calcule a probabilidade de obtermos uma bola branca.
 - uma geladeira, qual a probabilidade de levar uma defeituosa?
 - duas geladeiras, qual a probabilidade de levar duas defeituosas?
- Uma loja dispõe de 11 geladeiras do mesmo tipo, das quais 5 são defeituosas. Se um cliente for comprar:
 - uma geladeira, qual a probabilidade de levar uma defeituosa?
 - duas geladeiras, qual a probabilidade de levar duas defeituosas?



7. (ENEM) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

- a) $\frac{1}{3}$.
- b) $\frac{1}{4}$.
- c) $\frac{7}{15}$.
- d) $\frac{7}{23}$.
- e) $\frac{7}{25}$.

8. (ENEM 2020) O Estatuto do Idoso, no Brasil, prevê certos direitos às pessoas com idade avançada, concedendo a estas, entre outros benefícios, a restituição de imposto de renda antes dos demais contribuintes. A tabela informa os nomes e as idades de 12 idosos que aguardam suas restituições de imposto de renda. Considere que, entre os idosos, a restituição seja concedida em ordem decrescente de idade e que, em subgrupos de pessoas com a mesma idade, a ordem seja decidida por sorteio.

Nome	Idade (em ano)
Orlando	89
Gustavo	86
Luana	86
Teresa	85
Márcia	84
Roberto	82
Heloísa	75
Marisa	75
Pedro	75
João	75
Antônio	72
Fernanda	70

Nessas condições, a probabilidade de João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição é igual a:

- a) $\frac{1}{12}$.
- b) $\frac{7}{12}$.
- c) $\frac{1}{8}$.
- d) $\frac{5}{6}$.
- e) $\frac{1}{4}$.



Propriedades da probabilidade

▶ Quando um evento é igual ao seu espaço amostral, é chamado de **evento certo**. A probabilidade do evento certo ocorrer é igual a 1 ou 100%.

$$\text{Se } S = E, \text{ então } P(S) = P(E) = 1 = 100\%$$

→ Exemplo:

No lançamento de uma moeda, a probabilidade de ocorrer cara ou coroa é 1 ou 100%, pois

$$S = \{C, K\} \text{ e } n(S) = 2 \text{ e o evento é } E = \{C, K\} \text{ e } n(E) = 2.$$

$$\text{Portanto, } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{2} = 1 = 100\%.$$

▶ Quando um evento é igual ao conjunto vazio, é chamado de **evento impossível**. A probabilidade do evento impossível ocorrer é igual a zero ou 0%.

$$\text{Se } E = \emptyset, \text{ então } P(E) = P(\emptyset) = 0 = 0\%$$

→ Exemplo:

No lançamento de um dado, a probabilidade de ocorrer um número menor que 1 na face voltada para cima é igual a zero ou 0%, pois

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } n(S) = 6 \text{ e o evento é } E = \emptyset \text{ e } n(E) = 0.$$

$$\text{Portanto, } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%.$$

▶ A probabilidade de um evento E ocorrer é um número real maior ou igual a zero e menor ou igual a 1.

$$\text{Se } E \text{ é um evento, então } 0 \leq P(E) \leq 1$$

Probabilidade em um espaço não equiprovável

Até agora, estudamos a probabilidade em um espaço amostral equiprovável, em que cada elemento tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Vamos estudar, então, o assunto probabilidade em um espaço amostral em que a probabilidade de seus elementos ocorrerem não são as mesmas.

Consideremos um espaço amostral finito $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ no qual cada elemento tem uma probabilidade de ocorrer. Temos:

- ▶ a probabilidade de x_1 ocorrer é P_1 ;
- ▶ a probabilidade de x_2 ocorrer é P_2 ;
- ▶ a probabilidade de x_3 ocorrer é P_3 ;

.

.

.

.

.

- ▶ a probabilidade de x_n ocorrer é P_n .

As probabilidades de cada elemento têm as seguintes propriedades:

- ▶ Cada uma das probabilidades $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ é maior ou igual a zero e menor ou igual a 1.
- ▶ A soma das probabilidades de cada elemento do espaço amostral $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ocorrer é igual a 1, ou seja:

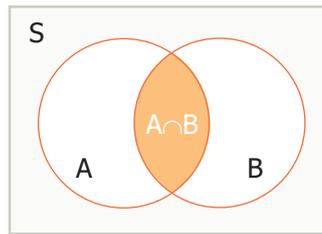
$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$$



Probabilidade da união de dois eventos (Regra do "ou")

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S.

- ▶ **Ocorrer o evento $A \cup B$** é ocorrer o evento A ou o evento B ou ocorrerem ambos os eventos A e B simultaneamente. Em outras palavras, é ocorrerem os elementos de A ou os elementos de B ou ocorrerem os elementos comuns a A e a B.
- ▶ **Ocorrer o evento $A \cap B$** é ocorrer o evento A e o evento B simultaneamente. Em outras palavras, é ocorrerem os elementos comuns a A e a B. Assim, teremos:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um deles impede a ocorrência do outro, ou seja, são eventos que não podem ocorrer ao mesmo tempo.

→ **Exemplo:** Lança-se um dado e observa-se a face voltada para cima.

Consideremos os eventos:

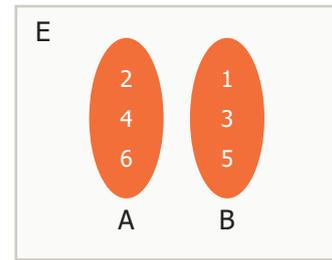
A: Ocorrer número par na face voltada para cima.

Temos: $A = \{2, 4, 6\}$

B: Ocorrer número ímpar na face voltada para cima.

Temos: $B = \{1, 3, 5\}$

Notemos que, se ocorrer número par na face voltada para cima do dado, não é possível ocorrer ao mesmo tempo número ímpar na mesma face. Quando jogamos um dado não pode ocorrer, ao mesmo tempo, um número par e um número ímpar na face voltada para cima. Portanto, a ocorrência do evento A impede a ocorrência do evento B e vice-versa. Assim, A e B são eventos mutuamente exclusivos. E, ainda, observemos que os eventos A e B não têm elementos comuns, por conseguinte, a interseção entre eles é o conjunto vazio.



$$A \cap B = \emptyset$$

Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \emptyset$ e em consequência:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Apoio ao texto

9. Em um colégio de 1.000 alunos, 500 alunos gostam de matemática, 400 gostam de física e 250 gostam de matemática e física. Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade dele gostar de matemática ou de física?

10. (UFSM) A tabela mostra o resultado de uma pesquisa sobre tipos sanguíneos em que foram testadas 600 pessoas.

Tipo de sangue	O ⁺	A ⁺	B ⁺	AB ⁺	O ⁻	A ⁻	B ⁻	AB ⁻
Número de pessoas	228	228	228	228	228	228	228	228

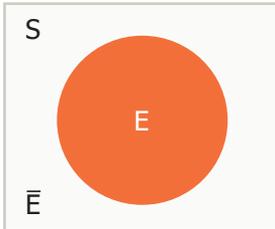
Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter sangue do tipo A⁺ ou A⁻?

- a) $\frac{2}{25}$.
- b) $\frac{11}{50}$.
- c) $\frac{9}{25}$.
- d) $\frac{19}{50}$.
- e) $\frac{11}{25}$.

Probabilidade de ocorrer um evento em função da probabilidade de ocorrer o seu complementar

Consideremos um experimento aleatório de espaço amostral S . Seja E um evento desse espaço amostral e \bar{E} o seu evento complementar.

Assim, temos:



$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

A probabilidade de um evento ocorrer é igual a 1 menos a probabilidade do seu evento complementar ocorrer.

Ou seja:

A probabilidade de um evento ocorrer é igual a 1 menos a probabilidade de ele não ocorrer.

→ **Exemplo:** Se a probabilidade de um atirador acertar um alvo é 0,7, então a probabilidade de o atirador errar o alvo é 1 menos a probabilidade de acertar o alvo, ou seja, é $1 - 0,7 = 0,3$.

Apoio ao texto

11. Um cesto contém 9 frutas, das quais 3 estão estragadas. Escolhendo, ao acaso, 2 frutas desse cesto, determine a probabilidade de que pelo menos uma esteja estragada.

Obs.: O evento complementar de "pelo menos uma estragada" é "nenhuma estragada".

12. (ENEM) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

- a) 23,7%
- b) 30,0%
- c) 44,1%
- d) 65,7%
- e) 90,0%



Probabilidade condicional

Consideremos um espaço amostral S e dois eventos, A e B , em que o evento B já ocorreu antes do evento A ocorrer.

Seja, então, B o evento que já ocorreu e A o evento que se quer que ocorra.

Importante

Em um problema de probabilidade condicional:

- ▶ sempre deve haver um evento que já tenha ocorrido;
- ▶ o espaço amostral se reduz ao evento que já ocorreu, ou seja, o espaço amostral fica sendo o evento que já ocorreu.

Apoio ao texto

13. No sorteio de um número de 1 a 25, sabe-se que foi sorteado um número menor que 12. Qual a probabilidade de ter sido sorteado um número ímpar?

Probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente ou sucessivamente (regra do "e")

Conhecida como teorema da Multiplicação das Probabilidades, e aplicada em problemas que pedem a probabilidade de ocorrer um evento A e um evento B , pois o conectivo **e** indica a **intersecção** dos eventos.

Se A e B eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Apoio ao texto

14. Uma urna contém 10 bolas brancas e 12 bolas pretas. Retirando-se, ao acaso, sucessivamente e com reposição, 2 bolas, calcule a probabilidade de:

a) as duas bolas serem brancas

b) saírem duas bolas de cores diferentes

15. Uma urna contém 8 bolas azuis e 5 vermelhas. Retiram-se, aleatoriamente, sucessivamente e sem reposição, 2 bolas. Determine a probabilidade de:

a) as duas bolas serem vermelhas

b) a primeira bola ser azul e a segunda ser vermelha

16. João e Maria são irmãos que viajaram para cidades diferentes. A probabilidade de João telefonar para seus pais é 0,7 e a probabilidade de Maria telefonar para seus pais é 0,9. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de João e Maria telefonarem para seus pais?

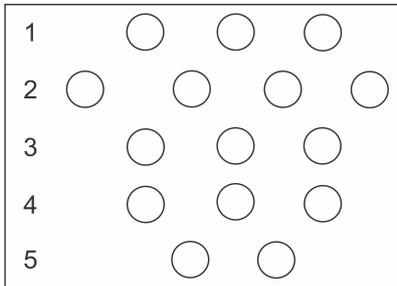
b) Qual a probabilidade de João telefonar para seus pais e Maria não telefonar?

c) Qual a probabilidade de exatamente um dos dois irmãos telefonar para seus pais?

d) Qual a probabilidade de pelo menos um dos dois irmãos telefonar para seus pais?

17. (ENEM) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:

Frente do cartão



Verso do cartão

Como jogar:

- Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
- Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas. Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
- Se encontrar um "X" em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
- Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de "X" distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é:

- a) $\frac{1}{27}$.
- b) $\frac{1}{36}$.
- c) $\frac{1}{54}$.
- d) $\frac{1}{72}$.
- e) $\frac{1}{108}$.

18. (ENEM) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%. A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de:

- a) 5,0%
- b) 7,5%
- c) 22,5%
- d) 30,0%
- e) 75,0%



Porcentagem

Razão centesimal

É a razão cujo denominador é igual a 100.

→ **Exemplos:**

- a) 25% =
- b) 8% =
- c) 0,37 =
- d) 0,05 =

Porcentagem

É o valor obtido quando multiplicamos uma razão centesimal por um determinado valor.

→ **Exemplos:**

Calcule:

- a) 20% de 60;
- b) 15% de 120;

Aumentos

Um produto custa x reais e sofre um aumento de 30%.

$$x + 0,3 \cdot x = 1,3x$$

Descontos

Um produto custa x reais e sofre um desconto de 20%.

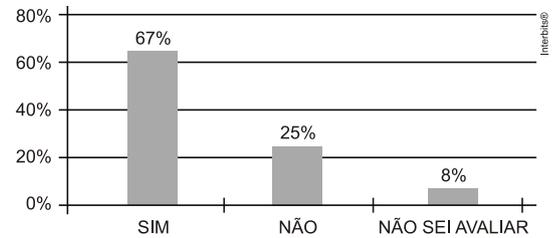
$$x - 0,2 \cdot x = 0,8x$$

Aumentos e descontos sucessivos



Apoio ao texto

1. (ENEM) Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Época. Ed. 619, 29 mar. 2010 (adaptado).

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam "Não" à enquete?

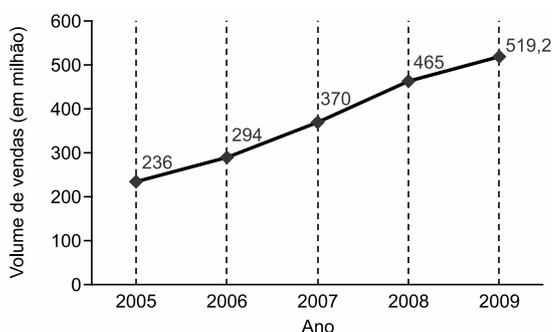
- a) Menos de 23.
- b) Mais de 23 e menos de 25.
- c) Mais de 50 e menos de 75.
- d) Mais de 100 e menos de 190.
- e) Mais de 200

2. (UFSM) A prefeitura, responsável pela iluminação pública de uma cidade, trocou 40% das luminárias por outras mais eficientes. Decorrido um ano da troca, verificou que 2% das novas luminárias e 6% das luminárias antigas apresentaram defeito. Qual é a porcentagem das luminárias da cidade que apresentaram defeito nesse período?

- a) 3,2%.
- b) 4,4%.
- c) 5,6%.
- d) 6,8%.
- e) 8,0%.



3. (ENEM 2021) A depressão caracteriza-se por um desequilíbrio na química cerebral. Os neurônios de um deprimido não respondem bem aos estímulos dos neurotransmissores. Os remédios que combatem a depressão têm o objetivo de restabelecer a química cerebral. Com o aumento gradativo de casos de depressão, a venda desses medicamentos está em crescente evolução, conforme ilustra o gráfico.



Veja, 10 fev. 2010 (adaptado).

No período de 2005 a 2009, o aumento percentual no volume de vendas foi de

- a) 45,4.
- b) 54,5.
- c) 120.
- d) 220.
- e) 283,2.

4. (UFMS) Sobre o preço de um armário incide uma alíquota de 20% em tributos, fazendo com que seu preço seja de R\$960,00. Supondo que a alíquota dos tributos seja reduzida de 20% para 15%, o novo preço do armário será, em reais, igual a

- a) 800
- b) 850
- c) 900
- d) 920
- e) 960

5. (ENEM) O colesterol total de uma pessoa é obtido pela soma da taxa do seu "colesterol bom" com a taxa do seu "colesterol ruim". Os exames periódicos, realizados em um paciente adulto, apresentaram taxa normal de "colesterol bom", porém, taxa do "colesterol ruim" (também chamado LDL) de 280 mg/dL. O quadro apresenta uma classificação de acordo com as taxas de LDL em adultos.

Taxa de LDL (mg/dL)	
Ótima	Menor do que 100
Próxima de ótima	De 100 a 129
Limite	De 130 a 159
Alta	De 160 a 189
Muito alta	190 ou mais

Disponível em: www.minhavidacom.br. Acesso em: 15 out. 2015 (adaptado).

O paciente, seguindo as recomendações médicas sobre estilo de vida e alimentação, realizou o exame logo após o primeiro mês, e a taxa de LDL reduziu 25%. No mês seguinte, realizou novo exame e constatou uma redução de mais 20% na taxa de LDL. De acordo com o resultado do segundo exame, a classificação da taxa de LDL do paciente é

- a) ótima.
- b) próxima de ótima.
- c) limite.
- d) alta.
- e) muito alta.



Estatística

Seguidamente entramos em contato com gráficos que fornecem uma série de informações, como índices de inflação, desemprego e aumento da expectativa de vida.

O levantamento de informações e sua exposição em tabelas e gráficos são feitos, em geral, de forma científica, utilizando a estatística, um dos ramos da matemática.

A estatística, portanto, trata do conjunto de métodos utilizados para a obtenção de dados, sua organização em tabelas e gráficos e sua posterior análise.

Termos estatísticos

População e unidade estatística

A estatística parte da observação de grupos geralmente numerosos, os quais denominamos **população estatística** ou **universo estatístico**.

Cada elemento da população estatística é chamado de **unidade estatística**.

População estatística	Unidade estatística
160 alunos de um colégio.	Cada aluno que estuda no colégio.
Todos os eleitores brasileiros.	Cada eleitor brasileiro.

Amostras

A população estatística (ou universo estatístico) pode ser:

Finita

Uma amostra finita apresenta um número finito de elementos.

→ **Exemplo:** O número de operários que trabalham em uma fábrica.

Infinita

Uma amostra infinita apresenta um número infinito de elementos.

→ **Exemplo:** As temperaturas, nos diversos pontos do Brasil, em determinado momento.

AMOSTRA é um subconjunto (ou uma parte selecionada) da população.

Mesmo quando o universo é finito, há razões que nos levam à utilização da técnica da amostragem: desde razões econômicas, por ser dispendioso observar um grande número de elementos, até razões de tempo, pois uma observação demorada pode fornecer dados desatualizados.

Frequência absoluta e frequência relativa

Imagine, por exemplo, um campeonato de futebol disputado entre Internacional, Corinthians, São Paulo e Grêmio, sendo realizado em um único dia, no Estádio Maracanã.

Vamos considerar que, nesse exemplo, o conjunto de torcedores seja de:

Colorados	40.000
Corinthians	20.000
São-paulinos	12.000
Gremistas	28.000
Total	100.000

A **frequência absoluta** de cada variável é o número de vezes que essa variável aparece no conjunto considerado. Vamos representá-la por F_A .

A **frequência total** da amostra é o número total de elementos da amostra. Vamos representá-la por F_T .

A **frequência relativa** de cada variável é a frequência absoluta, escrita em porcentagem, em relação à frequência total. Vamos representá-la por F_R .



Construção de tabelas e gráficos

Para facilitar a apresentação de um estudo estatístico, podemos construir tabelas e gráficos:

Tabelas

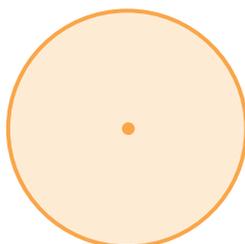
Construa uma tabela com os dados das frequências anteriores.

Torcedores	Frequência absoluta	Frequência relativa
Colorados	40.000	40%
Corinthians	20.000	20%
São-paulinos	12.000	12%
Gremistas	28.000	28%
Total	100.000	100%

Gráfico de setores

Ainda trabalhando com o exemplo dos times de futebol, podemos construir um gráfico de setores. Para tanto, devemos lembrar que o ângulo central de cada setor pode ser obtido a partir da seguinte informação:

Uma "volta completa" tem 360°.



Medidas de tendência central ou médias

Nas aplicações da estatística, aparece a necessidade de se realizarem inferências acerca dos dados de uma amostra. Recorre-se, então, a um número chamado média, que "representa" todos os elementos da amostra. Desse modo, deixamos de olhar a unidade estatística e passamos a observar a amostra inteira. Por exemplo, falar sobre a altura de cada brasileiro é inviável; então, falamos sobre uma altura média, ou seja, a altura média do brasileiro é x centímetros.

Dependendo do modo como é calculada essa média, temos distorções, que também são objeto de estudo da estatística. Aqui, entretanto, vamos focar nosso estudo apenas no cálculo das principais médias.

Média Aritmética (MA)

A média aritmética dos valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é determinada pelo quociente entre a soma desses valores e a quantidade destes.

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Apoio ao texto

1. A tabela abaixo mostra as quantidades diárias (em toneladas) de lixo recolhido em uma praia, durante os 5 primeiros dias de janeiro.

Dia	1	2	3	4	5
Quantidade	1,1	a	2,7	3a	2,2

Se, nesse período, a quantidade média diária foi 2,4 toneladas, qual o valor de a?

- a) 1,5
- b) 1,1
- c) 4,5
- d) 0
- e) 2,2

2. A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:

- a) 6,5
- b) 7,2
- c) 7,4
- d) 7,8
- e) 8,0



Média Aritmética Ponderada (MAP)

Calcula-se fazendo a divisão entre o somatório do produto de cada elemento pelo seu respectivo peso (n° de vezes que o valor se repete) e a soma de todos os pesos.

$$\text{MAP} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

Importante

Calcule primeiro os pesos.

Apoio ao texto

3. Uma empresa de comunicação conta com duas categorias de funcionários: telemarketing e diretoria. Os funcionários da primeira categoria recebem R\$ 950,00 mensalmente, enquanto os da segunda recebem R\$ 9.500,00. Sabendo que essa empresa possui 63 funcionários no setor de telemarketing e 5 diretores, o salário médio pago a eles é de aproximadamente:

- a) R\$ 5.985,00
- b) R\$ 4.750,00
- c) R\$ 1.580,00
- d) R\$ 950,00
- e) R\$ 9.500,00

Importante

Moda (M_o)

A moda de uma distribuição é representada pelo elemento de maior frequência.

→ **Exemplo:** As alturas de cinco alunos, em metros, são 1,80; 1,76; 1,76; 1,55 e 1,63. A moda é 1,76.

Mediana (M_d)

Para obter a mediana de uma distribuição, organize os dados em ordem crescente (ou decrescente), formando, assim, um **rol**.

Se o rol tiver em número ímpar de termos, a mediana é o elemento do meio; se o rol tiver um número par de termos, a mediana é a média aritmética dos dois termos mais centrais do rol.

→ **Exemplo 1:** Rol 1; 1; 2; 5; 6; 7; 10 $M_d = 5$ → **Exemplo 2:** Rol 8; 9; 10; 12; 13; 20

$$M_d = \frac{10 + 12}{2} = 11$$

Apoio ao texto

4. Os dois conjuntos P e L, de 12 valores cada, representam, respectivamente, as idades das atletas das equipes de vôlei feminino da Seleção Brasileira nos Jogos Olímpicos de Pequim, em 2008, e nos Jogos Olímpicos de Londres, em 2012, respectivamente.

P: 21, 23, 24, 25, 25, 25, 26, 28, 28, 31, 32, 38.

L: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 27, 27, 30, 30, 32.

Com base nessas informações, analise as seguintes afirmativas.

- I. A moda do conjunto P tem duas unidades a menos que a moda do conjunto L.
- II. A mediana do conjunto L é igual a 25,5 anos.



Demais vestibulares

Desvio Padrão

O desvio padrão é uma medida que expressa o grau de dispersão de um conjunto de dados. Ou seja, o desvio padrão indica o quanto um conjunto de dados é uniforme. Quanto mais próximo de 0 for o desvio padrão, mais homogêneos são os dados.

Apoio ao texto

5. Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir, são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso:

	Matemática	Português	Conhecimentos	Média	Mediana	Desvio padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,81
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é:

- a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
- b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
- c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
- d) Paulo, pois obteve maior mediana.
- e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

**Unidade 1**

- | | | | |
|-----------------|--------|---------|-------|
| 1. 30, 78 e 398 | 4. 610 | 7. 1020 | 10. D |
| 2. B | 5. B | 8. B | 11. 8 |
| 3. C | 6. D | 9. 2 | 12. B |

Unidade 2

- | | | |
|-----------------------------------|--|---------------------------------------|
| 1. D | 9. D | 15. C |
| 2. B | 10. a) $-\sqrt{2}/2$ | 16. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou |
| 3. $\text{Im} = [1,5]$ e $P = 12$ | b) $-1/2$ | $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou |
| 4. B | c) $-\sqrt{3}$ | b) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou |
| 5. A | 11. $4\sqrt{3}$ | $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou |
| 6. $P = 3\pi$ | 12. $12\sqrt{2}$ | |
| $D = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi$ | 13. D | |
| 7. C | 14. a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ | 17. C |
| 8. B | b) $-\text{sen } x$ | |

Unidade 3

- | | | | |
|-----------|--------|------------|------------|
| 1. a) 90 | 5. 120 | 13. a) 120 | 20. 60 |
| b) 72 | 6. 120 | b) 2.160 | 21. C |
| 2. a) 120 | 7. 6 | 14. 15 | 22. 25 |
| b) 1.680 | 8. 120 | 15. 12 | 23. a) 343 |
| 3. a) 24 | 9. 120 | 16. 21.600 | b) 2.058 |
| b) 720 | 10. 20 | 17. D | 24. E |
| 4. a) 56 | 11. 90 | 18. B | 25. D |
| b) 126 | 12. 24 | 19. A | 26. E |

Unidade 4

- | | | |
|--------------|-----------------|------------|
| 1. $1/2$ | 9. $13/20$ | 16. a) 63% |
| 2. $2/3$ | 10. E | b) 7% |
| 3. $3/4$ | 11. $7/12$ | c) 34% |
| 4. $1/9$ | 12. D | d) 97% |
| 5. $1/2$ | 13. $6/11$ | 17. C |
| 6. a) $5/11$ | 14. a) $25/121$ | 18. C |
| b) $2/11$ | b) $60/121$ | |
| 7. E | 15. a) $5/39$ | |
| 8. E | b) $10/39$ | |

Unidade 5

1. C
2. B
3. C
4. D
5. D

Unidade 6

1. A
2. B
3. C
4. I = V; II = F
5. B

HABILIDADES À PROVA 1

» Progressões

○ 1. (ENEM) Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Disponível em: <http://www.webrun.com.br>. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente:

- a) 12 dias.
- b) 13 dias.
- c) 14 dias.
- d) 15 dias.
- e) 16 dias.

○ 2. (ENEM) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro, foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

- a) 38.000
- b) 40.500
- c) 41.000
- d) 42.000
- e) 48.000

○ 3. (ENEM) O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal.

Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

★ ★★ ★★★ ★★★★ ★★★★★ ...
1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 150ª

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

- funcionário I: aproximadamente 200 estrelas;
- funcionário II: aproximadamente 6.000 estrelas;
- funcionário III: aproximadamente 12.000 estrelas;
- funcionário IV: aproximadamente 22.500 estrelas;
- funcionário V: aproximadamente 22.800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

○ 4. (ENEM) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida, no período de 2012 a 2021, será de:

- a) 497,25
- b) 500,85
- c) 502,87
- d) 558,75
- e) 563,25



○ 5. (ENEM) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.

A quantidade de cartas que forma o monte é:

- a) 21
- b) 24
- c) 26
- d) 28
- e) 31

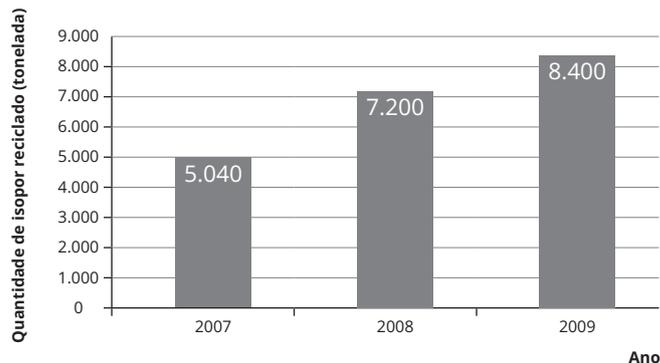
○ 6. (ENEM) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1.380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R\$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é:

- a) R\$ 512.000,00.
- b) R\$ 520.000,00.
- c) R\$ 528.000,00.
- d) R\$ 552.000,00.
- e) R\$ 584.000,00.

Anotações:

○ 7. (ENEM 2020) O isopor é um material composto por um polímero chamado poliestireno. Todos os produtos de isopor são 100% recicláveis, assim como os plásticos em sua totalidade. O gráfico mostra a quantidade de isopor, em tonelada, que foi reciclada no Brasil nos anos de 2007, 2008 e 2009. Considere que o aumento da quantidade de isopor reciclado ocorrida de 2008 para 2009 repita-se ano a ano de 2009 até 2013 e, a partir daí, a quantidade total reciclada anualmente permaneça inalterada por um período de 10 anos.



Disponível em: www.plastivida.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012 (adaptado).

Qual é a quantidade prevista para reciclagem de isopor, em tonelada, para o ano de 2020?

- a) 21 840
- b) 21 600
- c) 13 440
- d) 13 200
- e) 9 800

○ 8. (ENEM) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

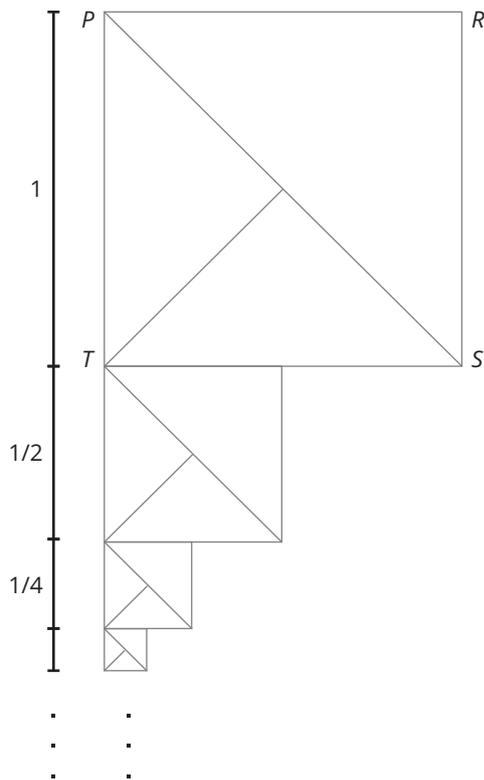
Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

- a) 2×128
- b) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
- c) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
- d) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
- e) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$



○ 9. (ENEM 2020) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$
- c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$
- d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$
- e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

○ 10. (ENEM 2023) O gerente de uma fábrica pretende comparar a evolução das vendas de dois produtos similares (I e II). Para isso, passou a verificar o número de unidades vendidas de cada um desses produtos em cada mês. Os resultados dessa verificação, para os meses de abril a junho, são apresentados na tabela.

Produto	Vendas em abril (unidade)	Vendas em maio (unidade)	Vendas em junho (unidade)
I	80	90	100
II	190	170	150

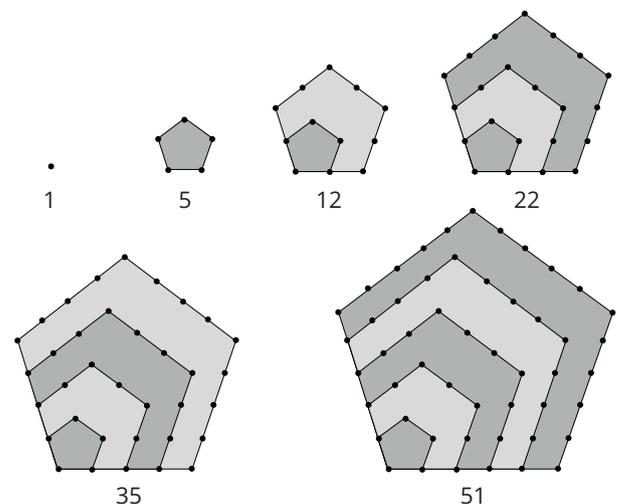
O gerente estava decidido a cessar a produção do produto II no mês seguinte àquele em que as vendas do produto I superassem as do produto II.

Suponha que a variação na quantidade de unidades vendidas dos produtos I e II se manteve, mês a mês, como no período representado na tabela.

Em qual mês o produto II parou de ser produzido?

- a) Junho.
- b) Julho.
- c) Agosto.
- d) Setembro.
- e) Outubro.

○ 11. (ENEM 2023) Os números figurados pentagonais provavelmente foram introduzidos pelos pitagóricos por volta do século V a.C. As figuras ilustram como obter os seis primeiros deles, sendo os demais obtidos seguindo o mesmo padrão geométrico.

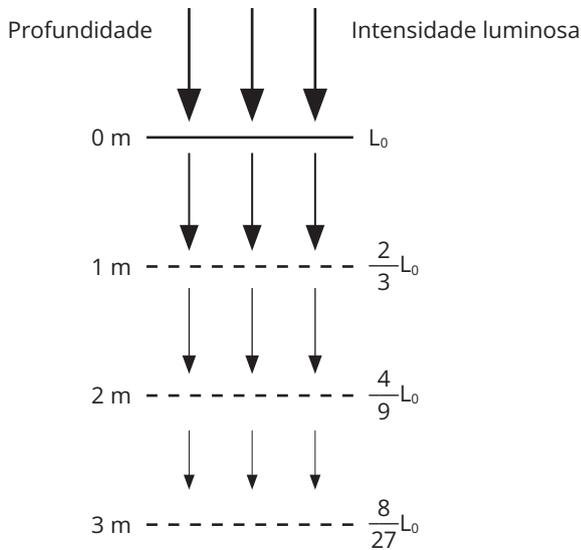


O oitavo número pentagonal é

- a) 59.
- b) 83.
- c) 86.
- d) 89.
- e) 92.



○ 12. (ENEM 2023) O esquema mostra como a intensidade luminosa decresce com o aumento da profundidade em um rio, sendo L_0 a intensidade na sua superfície.



Considere que a intensidade luminosa diminui, a cada metro acrescido na profundidade, segundo o mesmo padrão do esquema.

A intensidade luminosa correspondente à profundidade de 6 m é igual a:

- a) $\frac{1}{9}L_0$
- b) $\frac{16}{27}L_0$
- c) $\frac{32}{243}L_0$
- d) $\frac{64}{729}L_0$
- e) $\frac{128}{2187}L_0$

○ 13. (ENEM) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício.

Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

- a) 40
- b) 60
- c) 100
- d) 115
- e) 120

○ 14. (ENEM) O slogan “Se beber não dirija”, muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema da ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro.

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1050	900	850

Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015. Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de:

- a) 150.
- b) 450.
- c) 550.
- d) 700.
- e) 800.

○ 15. (ENEM) Em uma determinada estrada existem dois telefones instalados no acostamento: um no quilômetro 30 e outro no quilômetro 480. Entre eles serão colocados mais 8 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância. Qual a sequência numérica que corresponde à quilometragem em que os novos telefones serão instalados?

- a) 30, 90, 150, 210, 270, 330, 390, 450
- b) 75, 120, 165, 210, 255, 300, 345, 390
- c) 78, 126, 174, 222, 270, 318, 366, 414
- d) 80, 130, 180, 230, 280, 330, 380, 430
- e) 81, 132, 183, 234, 285, 336, 387, 438

○ 16. (ENEM) A cada dia que passa, um aluno resolve 2 exercícios a mais do que resolveu no dia anterior. Ele completou seu 11º dia de estudo e resolveu 22 exercícios. Seu objetivo é resolver, no total, pelo menos 272 exercícios. Mantendo seu padrão de estudo, quantos dias ele ainda precisa para atingir sua meta?

- a) 5
- b) 6
- c) 9
- d) 16
- e) 20



○ **17. (UFSM)** O problema a seguir, traduzido de uma rima inglesa datada do século XVIII, aparece no filme Die Hard (1995) onde o ator Bruce Willis tem que resolvê-lo para impedir a explosão de uma bomba.

“A caminho de St. Ives,
Encontrei um homem com sete esposas;
Cada esposa tinha sete sacos,
Cada saco tinha sete gatos,
Cada gato tinha sete gatinhos.
Gatinhos, gatos, sacos e esposas,
Quantos iam a caminho de St. Ives?”

A resposta correta é:

- a) 28.
- b) 49.
- c) 2401.
- d) 2800.
- e) 4900.

○ **18. (UFSM)** O diretório acadêmico de uma Universidade organizou palestras de esclarecimento sobre o plano de governo dos candidatos a governador. O anfiteatro, onde foram realizados dos encontros, possuía 12 filas de poltronas distribuídas da seguinte forma: na primeira fila 21 poltronas, na segunda 25, na terceira 29, e assim sucessivamente. Sabendo que, num determinado dia, todas as poltronas foram ocupadas e que 42 pessoas ficaram em pé, o total de participantes, excluído o palestrante, foi de

- a) 474
- b) 516
- c) 557
- d) 558
- e) 559

○ **19. (UFSM)** A sequência de números reais (x, y, z, t) forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 160; a sequência de números reais (x, y, w, u) forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 3. Assim, a soma $t + u$ é:

- a) 440
- b) 340
- c) 240
- d) 140
- e) 40

○ **20. (UFSM)** O salário de um operário é combinado do seguinte modo: no 1º dia de trabalho, ele recebe R\$ 1,00; no 2º dia, R\$ 2,00; no 3º dia, R\$ 3,00 e assim sucessivamente. Se ele trabalhar exatamente 100 dias consecutivos, ao final desse período, ele recebe, em reais,

- a) 5020
- b) 5031
- c) 5040
- d) 5050
- e) 5061

○ **21. (UFSM)** Uma indústria produziu 10.000 unidades de um certo produto em janeiro de 2007. Supondo que a produção aumente em 50 unidades a cada mês, pode-se afirmar que:

- I. a sequência de unidades produzidas a cada mês forma uma progressão geométrica (PG) de razão 50.
- II. o número total de unidades produzidas é, ao final do primeiro ano, de 123.300 unidades.
- III. a produção de 10.750 unidades por mês ocorrerá em abril de 2008.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s)

- a) I apenas.
- b) II apenas.
- c) I e II apenas.
- d) II e III apenas.
- e) I, II e III.

○ **22. (UFSM)** Aquiles persegue uma tartaruga. A velocidade dele é igual a 10 vezes a velocidade da tartaruga. A distância que os separa é 100 metros. Nessas condições, quando Aquiles vencer os 100 metros, a tartaruga terá corrido $\frac{1}{10}$ do que Aquiles percorreu e ficará 10 metros à sua frente. Quando Aquiles correr esses 10 metros, a tartaruga terá percorrido $\frac{1}{10}$ dessa distância e ficará 1 metro à sua frente, e assim por diante. Então, a distância que Aquiles deverá correr para alcançar a tartaruga será, em metros, de

- a) 1.000
- b) $\frac{1.010}{9}$
- c) 112
- d) $\frac{1.000}{9}$
- e) 110

○ **23. (UFSM)** Um surto de gripe A (H1N1) se inicia numa pequena cidade, a partir do retorno de um de seus moradores, que estivera em viagem a uma região endêmica.

Sabendo que cada pessoa pode ser contaminada uma única vez e considerando que o número de novos casos da gripe A triplice a cada dia, o número total de pessoas portadoras de gripe A, após 5 dias do início do surto na cidade, será igual a

- a) 729.
- b) 364.
- c) 243.
- d) 122.
- e) 81.



○ **24. (UFSM)** As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte em todo mundo. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde, 17,3 milhões de pessoas morreram em 2012, vítimas dessas doenças. A estimativa é que, em 2030, esse número seja de 23,6 milhões. Suponha que a estimativa para 2030 seja atingida e considere (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas) por doenças cardiovasculares no mundo, com $n = 1$ correspondendo a 2012, com $n = 2$ correspondendo a 2013 e assim por diante. Se (a_n) é uma progressão aritmética, então o 8º termo dessa sequência, em milhões de pessoas, é igual a

- a) 19,59.
- b) 19,61.
- c) 19,75.
- d) 20,10.
- e) 20,45.

○ **25. (UFSM)** Em 2011, o Ministério da Saúde firmou um acordo com a Associação das Indústrias de Alimentação (Abio) visando a uma redução de sódio nos alimentos industrializados. A meta é acumular uma redução de 28.000 toneladas de sódio nos próximos anos. Suponha que a redução anual de sódio nos alimentos industrializados, a partir de 2012, seja dada pela sequência:

$$(1.400, 2.000, 2.600, \dots, 5.600)$$

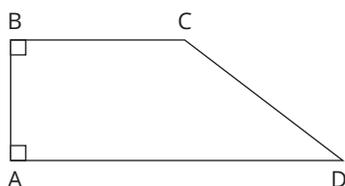
Assim, assinale verdadeira (V) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir.

- () A sequência é uma progressão geométrica de razão 600.
- () A meta será atingida em 2019.
- () A redução de sódio nos alimentos industrializados acumulada até 2015 será de 3.200 toneladas.

A sequência correta é:

- a) F - V - V.
- b) V - F - V.
- c) V - V - F.
- d) F - V - F.
- e) F - F - V.

○ **26. (UFSM)** A figura a seguir representa um trapézio retângulo no qual as medidas dos lados AB, BC e CD estão em P.A. e medem, respectivamente, x , $2x - 2$ e $8 - x$. Nessa s condições, a medida do lado AD vale



- a) 8.
- b) 6.
- c) 5.
- d) 4.
- e) 3.

○ **27. (UFSM)** Um navio encalhado provoca, em torno de si, um vazamento circular de óleo. Constatou-se, ao fim do 1º dia de vazamento, que o raio da mancha de óleo media r metros. Verificou-se, ainda, que o raio da mancha de óleo dobrava a cada 24 horas. Nessas condições, a razão da área da mancha de óleo ao fim do 7º dia pela área da mancha no fim do 1º dia é:

- a) 14
- b) 28
- c) 2^7
- d) 2^8
- e) 2^{12}

○ **28. (UFSM)** A sequência $(x, y, 15)$ é uma P.A. de razão r , e a seqüência $(x, y, 20)$ é uma P.G. decrescente de razão q . Então:

- a) $r + q = -47/3$
- b) $r + q = -43/3$
- c) $r + q = -40/3$
- d) $r + q = 47/3$
- e) $r + q = 33/2$

○ **29. (UFSM)** Uma colméia nova tem 8000 abelhas. Destas, a cada dia que passa, morrem 200. Do 21º dia em diante, nascem diariamente 2000 abelhas que vivem, em média, 40 dias. Após um certo tempo, o número de abelhas dessa colméia se estabilizará em, aproximadamente,

- a) 38000
- b) 40000
- c) 60000
- d) 80000
- e) 100000

○ **30. (UFSM)** Uma fábrica de implementos agrícolas vinha produzindo, mensalmente, um certo número de plantadeiras. Prevendo que em 6 meses, na época do plantio, a demanda seria maior, resolveu aumentar a produção de 10 unidades por mês em relação ao mês anterior. Se a produção total, durante estes seis meses, foi de 282 unidades, quantas unidades foram produzidas no primeiro mês?

- a) 10
- b) 22
- c) 25
- d) 36
- e) 60



○ 31. (UFSM) No trecho de maior movimento de uma rodovia, ou seja, entre o km 35 e o km 41, foram colocados outdoors educativos de 300 em 300 metros. Como o primeiro foi colocado exatamente a 50 metros após o Km 35, a distância entre o 13º outdoor e KM 41 é?

- a) 3700
- b) 3650
- c) 2750
- d) 2350
- e) 2150

○ 32. (UFSM) Uma fábrica vendia 12 camisetas por mês para certa rede de academias, desde janeiro de um determinado ano. Devido ao verão, essa venda foi triplicada a cada mês, de setembro a dezembro. O total de camisetas vendidas nesse quadri-
mestre e a média de vendas, por mês, durante o ano, foram, respectivamente,

- a) 1536 e 128
- b) 1440 e 128
- c) 1440 e 84
- d) 480 e 84
- e) 480 e 48

○ 33. (UFSM) A tabela mostra o número de pessoas que procuraram serviços de saúde, segundo o local, numa determinada cidade.

Local \ Ano	2001	2002	2003	2004	2005
Postos e Centros de Saúde	2.000	4.000	8.000	16.000	32.000
Clínicas Privadas	4.200	5.400	6.600	7.800	9.000
Clínicas Odontológicas	857	854	851	848	845

Supõe-se que esse comportamento é mantido nos próximos anos. Partindo dos dados, fazem-se as seguintes afirmações:

- I. O número de pessoas que procuraram Postos e Centros de Saúde cresceu em progressão geométrica de razão 2.000.
- II. O total de pessoas que procuraram atendimento em Clínicas Privadas de 2001 até 2011 é igual a 112.200.
- III. Em 2011, o número de atendimentos em Clínicas Odontológicas é igual a 827.

Está(ão) correta(s):

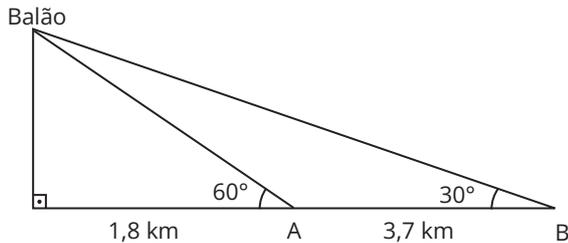
- a) apenas I.
- b) apenas II.
- c) apenas I e III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II e III.



HABILIDADES À PROVA 2

» Trigonometria

○ 1. (ENEM) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

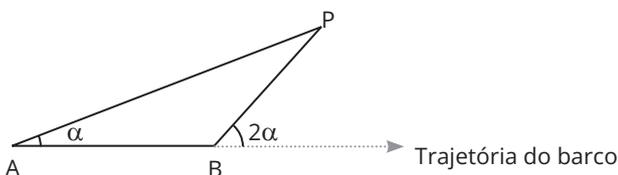


Disponível em: www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60° ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30° . Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- a) 1,8 km
- b) 1,9 km
- c) 3,1 km
- d) 3,7 km
- e) 5,5 km

○ 2. (ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α . A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2.000$ m. Com base nesses dados e mantendo a trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

- a) 1.000 m
- b) $1.000\sqrt{3}$ m
- c) $2.000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
- d) 2.000 m
- e) $2.000\sqrt{3}$ m

○ 3. (ENEM) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas em uma avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Essas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

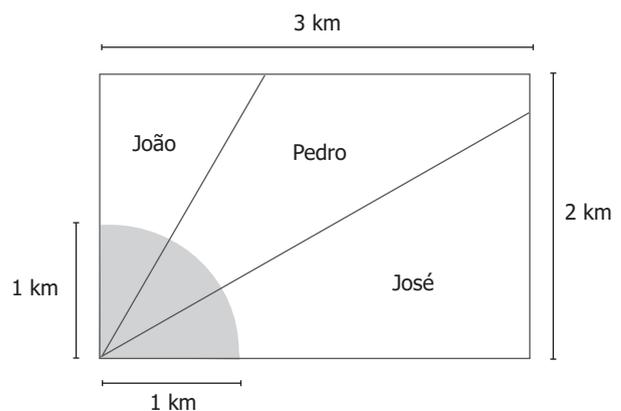


Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa, na avenida, um espaço:

- a) menor que 100 m^2 .
- b) entre 100 m^2 e 300 m^2 .
- c) entre 300 m^2 e 500 m^2 .
- d) entre 500 m^2 e 700 m^2 .
- e) maior que 700 m^2 .

○ 4. (ENEM) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



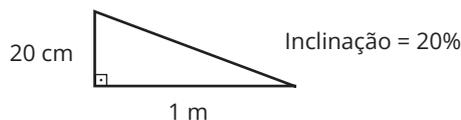
Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a:

- a) 50%
- b) 43%
- c) 37%
- d) 33%
- e) 19%

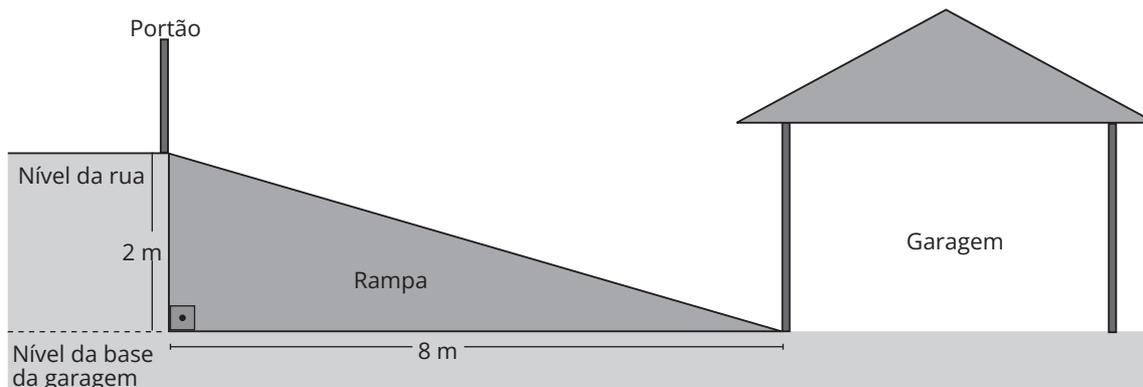
(Considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$.)



○ 5. (ENEM) A inclinação de uma rampa é calculada da seguinte maneira: para cada metro medido na horizontal, mede-se x centímetros na vertical. Diz-se, nesse caso, que a rampa tem inclinação de x%, como no exemplo da figura:



A figura apresenta um projeto de uma rampa de acesso a uma garagem residencial cuja base, situada 2 metros abaixo do nível da rua, tem 8 metros de comprimento.



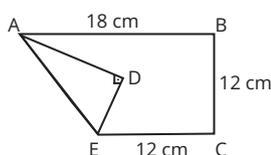
Depois de projetada a rampa, o responsável pela obra foi informado de que as normas técnicas do município onde ela está localizada exigem que a inclinação máxima de uma rampa de acesso a uma garagem residencial seja de 20%.

Se a rampa projetada tiver inclinação superior a 20%, o nível da garagem deverá ser alterado para diminuir o percentual de inclinação, mantendo o comprimento da base da rampa.

Para atender às normas técnicas do município, o nível da garagem deverá ser:

- a) elevado em 40 cm.
- b) elevado em 50 cm.
- c) mantido no mesmo nível.
- d) rebaixado em 40 cm.
- e) rebaixado em 50 cm.

○ 6. (ENEM) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

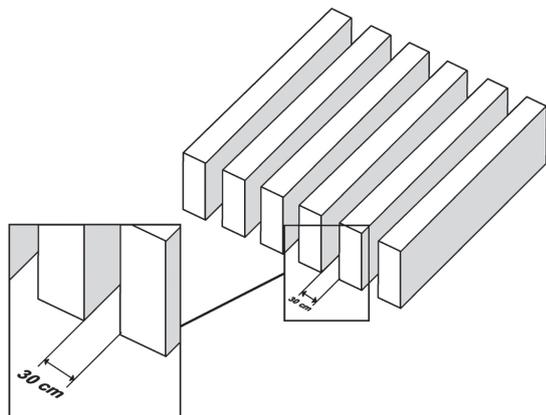


Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é:

- a) $2\sqrt{22}$ cm.
- b) $6\sqrt{3}$ cm.
- c) 12 cm.
- d) $6\sqrt{5}$ cm.
- e) $12\sqrt{2}$ cm.

Anotações:

○ 7. (ENEM 2020) Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



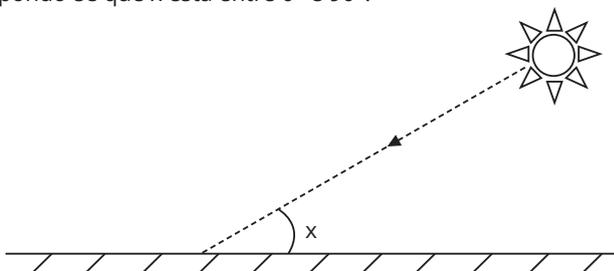
Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.

Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de

- a) 9.
- b) 15.
- c) 26.
- d) 52.
- e) 60.

○ 8. (ENEM) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.

Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$, sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90° .

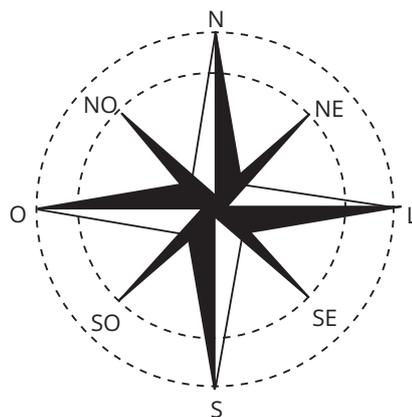


Quando $x = 30^\circ$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

- a) 33%
- b) 50%
- c) 57%
- d) 70%
- e) 86%



○ 9. (ENEM) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste, e seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

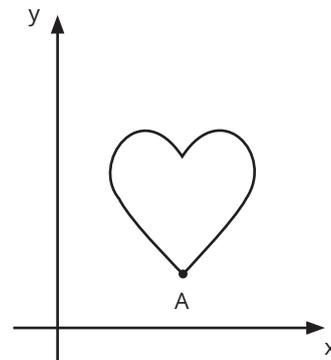
- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO), devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

- a) 75° no sentido horário.
- b) 105° no sentido anti-horário.
- c) 120° no sentido anti-horário.
- d) 135° no sentido anti-horário.
- e) 165° no sentido horário.

○ 10. (ENEM) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nesta ordem:

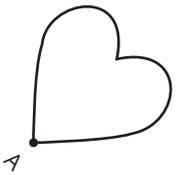
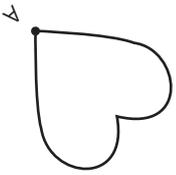
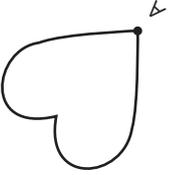
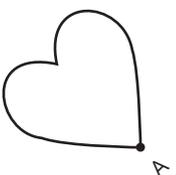
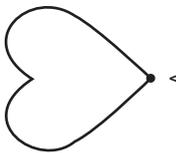


- 1ª) Reflexão no eixo x ;
- 2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;
- 3ª) Reflexão no eixo y ;
- 4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;
- 5ª) Reflexão no eixo x .

Disponível em: www.pucsp.br. Acesso em: 2 ago. 2012.



Qual a posição final da figura?

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 
- e) 

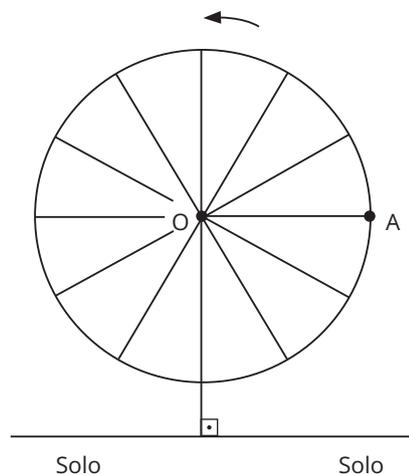
○ 11. (ENEM) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de f seja dado por:

$$r(t) = \frac{5.865}{1 + 0,15 \cdot \cos(0,06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r , no apogeu e no perigeu, representada por S . O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

- a) 12.765 km
 b) 12.000 km
 c) 11.730 km
 d) 10.965 km
 e) 5.865 km

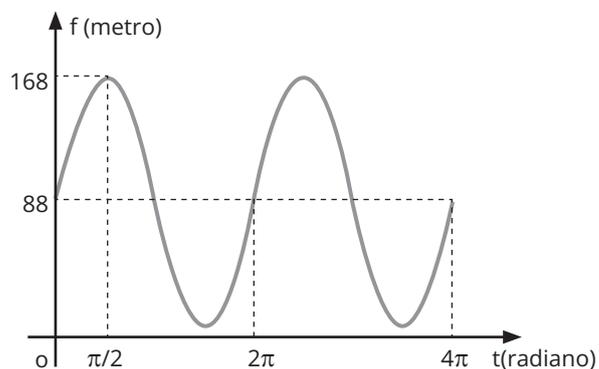
○ 12. (ENEM) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: <http://en.wikipedia.org>. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t .

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:

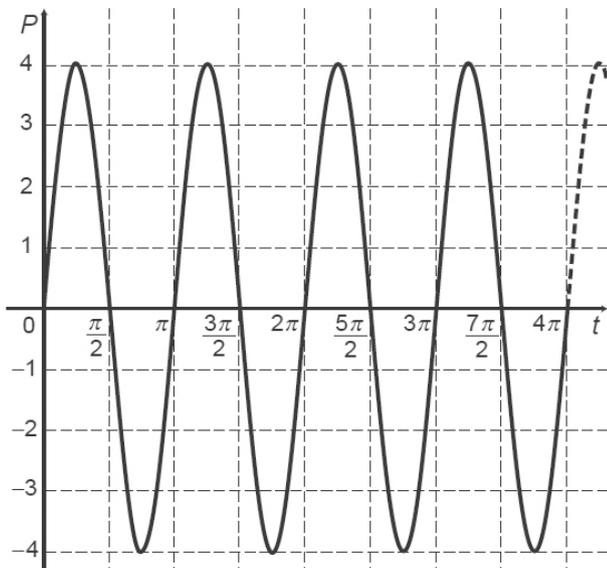


A expressão da função altura é dada por:

- a) $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$
 b) $f(t) = 80\text{cos}(t) + 88$
 c) $f(t) = 88\text{cos}(f) + 168$
 d) $f(t) = 168\text{sen}(t) + 88\text{cos}(t)$
 e) $f(t) = 88\text{sen}(t) + 168\text{cos}(t)$

○ 13. (ENEM) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A \sin(\omega t + \theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $\omega = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{\omega}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.

O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t , conforme ilustra a figura.



A expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t , é:

- a) $P(t) = 4\text{sen}(2t)$
- b) $P(t) = -4\text{sen}(2t)$
- c) $P(t) = -4\text{sen}(4t)$
- d) $P(t) = 4\text{sen}(2t + \frac{\pi}{4})$
- e) $P(t) = 4\text{sen}(4t + \frac{\pi}{4})$

○ 14. (ENEM) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B \cos(kt)$ em que A , B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida por esse cientista, ao analisar o caso específico foi:

- a) $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$
- b) $P(t) = 78 + 42 \cos(3\pi t)$
- c) $P(t) = 99 + 21 \cos(2\pi t)$
- d) $P(t) = 99 + 21 \cos(t)$
- e) $P(t) = 78 + 42 \cos(f)$



○ 15. (ENEM) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

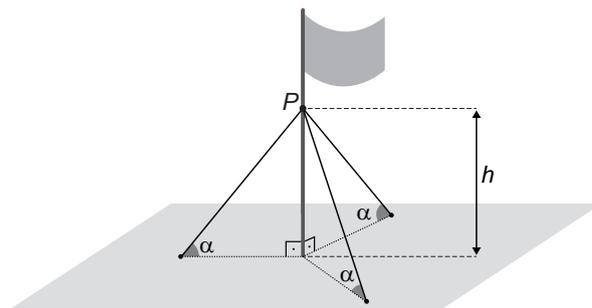
A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot \cos(\frac{\pi x - \pi}{6})$, em que x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

- a) janeiro.
- b) abril.
- c) junho.
- d) julho.
- e) outubro.

○ 16. (ENEM) O mastro de uma bandeira foi instalado perpendicularmente ao solo em uma região plana. Devido aos fortes ventos, três cabos de aço, de mesmo comprimento, serão instalados para dar sustentação ao mastro. Cada cabo de aço ficará perfeitamente esticado, com uma extremidade num ponto P do mastro, a uma altura h do solo, e a outra extremidade, num ponto no chão, como mostra a figura.



Os cabos de aço formam um ângulo α com o plano do chão. Por medida de segurança, há apenas três opções de instalação:

- opção I: $h = 11$ m e $\alpha = 30^\circ$
- opção II: $h = 12$ m e $\alpha = 45^\circ$
- opção III: $h = 18$ m e $\alpha = 60^\circ$

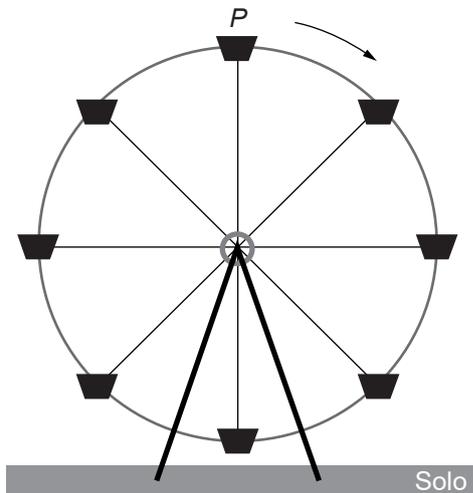
A opção a ser escolhida é aquela em que a medida dos cabos seja a menor possível.

Qual será a medida, em metro, de cada um dos cabos a serem instalados?

- a) $\frac{22\sqrt{3}}{3}$
- b) $11\sqrt{2}$
- c) $12\sqrt{2}$
- d) $12\sqrt{3}$
- e) 22



○ 17. (ENEM) A figura ilustra uma roda-gigante no exato instante em que a cadeira onde se encontra a pessoa P está no ponto mais alto dessa roda-gigante.

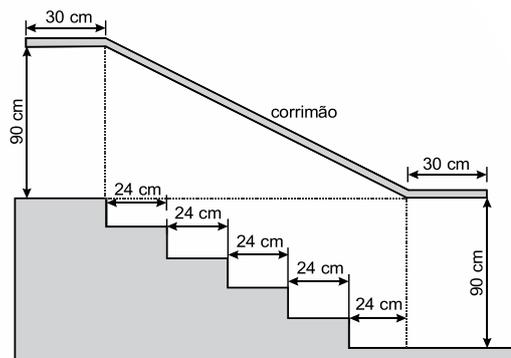


Com o passar do tempo, à medida que a roda-gigante gira, com velocidade angular constante e no sentido horário, a altura da cadeira onde se encontra a pessoa P , em relação ao solo, vai se alterando.

O gráfico que melhor representa a variação dessa altura, em função do tempo, contado a partir do instante em que a cadeira da pessoa P se encontra na posição mais alta da roda-gigante, é

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

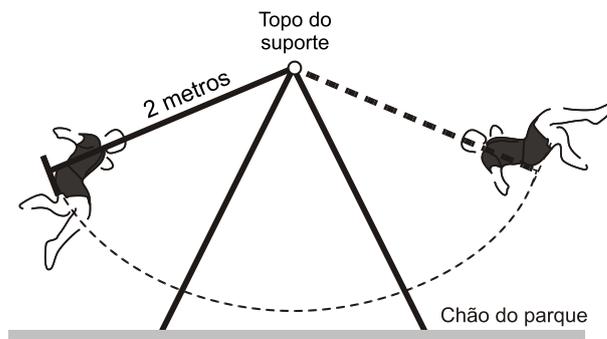
○ 18. (ENEM)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

- a) 1,8 m.
b) 1,9 m.
c) 2,0 m.
d) 2,1 m.
e) 2,2 m.

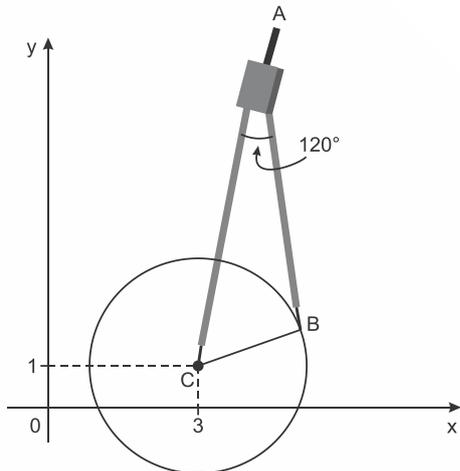
○ 19. (ENEM) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima. A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

- a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$
b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
c) $f(x) = x^2 - 2$
d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

○ **20. (ENEM)** Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120° . A ponta seca está representada pelo ponto C a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

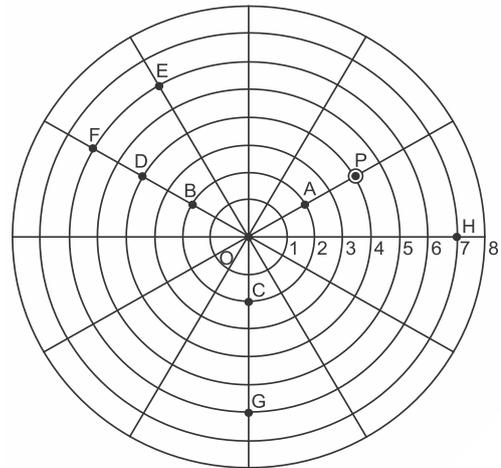
Tipo de material	Intervalo de valores de raio
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será:

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.

Anotações:

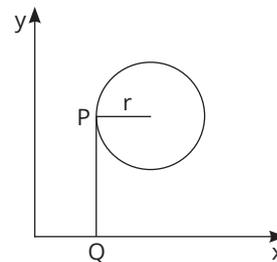
○ **21. (ENEM)** No jogo mostrado na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120° .



Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto:

- a) B.
- b) D.
- c) E.
- d) F.
- e) G.

○ **22. (ENEM)** Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.

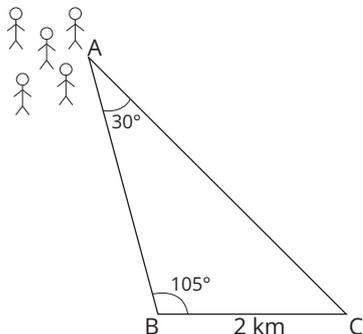


Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por:

- a) $r \left(1 - \operatorname{sen} \frac{d}{r} \right)$.
- b) $r \left(1 - \operatorname{cos} \frac{d}{r} \right)$.
- c) $r \left(1 - \operatorname{tg} \frac{d}{r} \right)$.
- d) $r \operatorname{sen} \left(\frac{r}{d} \right)$.
- e) $r \operatorname{cos} \left(\frac{r}{d} \right)$.



○ 23. (UFSM) O grupo de alunos participará de uma trilha em uma reserva ecológica. A equipe deverá sair do ponto A e chegar até o ponto C, conforme a figura. Como o percurso não poderá ser feito diretamente, os alunos deverão sair de A e passar por B para, depois, chegara C. Com isso, a distância, em km, a ser percorrida pelos estudantes é igual a:



- a) $\sqrt{2} + 2$
- b) $2\sqrt{6} + 2$
- c) $2(\sqrt{2} + 1)$
- d) $2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$
- e) $2\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right)$

○ 24. (UFSM) Na entrada de uma biblioteca, uma rampa retangular inclinada faz um ângulo de 15° com o piso horizontal e tem 2 metros de altura. O comprimento dessa rampa é, em metros, igual a:

Observação: use a identidade trigonométrica $\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(b) \cdot \cos(a)$

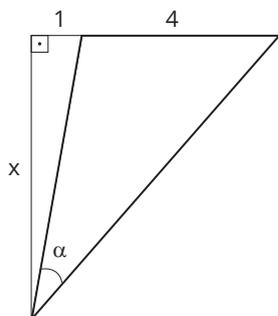
- a) $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.
- b) $\sqrt{6} + 1$
- c) $4(\sqrt{3} + 1)$.
- d) $2(\sqrt{3} - 1)$.
- e) $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

○ 25. (UFSM) Algumas dificuldades de aprendizagem podem estar relacionadas com problemas visuais que o aluno tem devido ao seu posicionamento em sala de aula.

Em uma sala de aula, um aluno está sentado próximo à parede, de frente para o quadro-negro. O quadro tem 4 m de comprimento e começa a 1 m dessa parede (conforme a figura).

Dado:

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

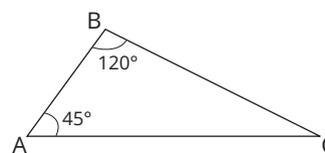


Se o aluno está a x metros da parede onde está o quadro, então o ângulo de visão α pode ser expresso por

- a) $\text{tg } \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- b) $\text{cotg } \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{x}$
- c) $\text{tg } \alpha = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- d) $\text{cotg } \alpha = \frac{x}{x^2 + 25}$
- e) $\text{tg } \alpha = \frac{4x}{x^2 + 5}$

○ 26. (UFSM)

Sugestão: $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$



No triângulo ABC dado, tem-se $\overline{AB} = 20$ m. O valor de \overline{BC} , em metros, é:

- a) $10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$
- b) $15(\sqrt{3} - 1)$
- c) $20(\sqrt{3} + 1)$
- d) $30(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
- e) $40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$

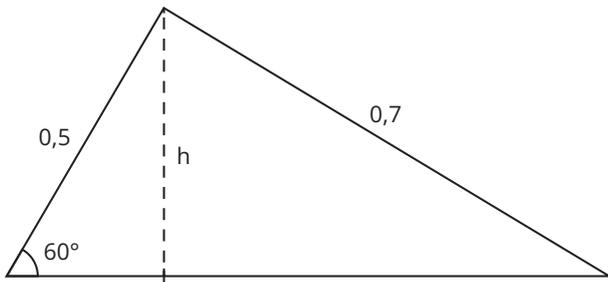
○ 27. (UFSM) Para investigar a razão entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua, o astrônomo grego Aristarco de Samos observou que, quando a Lua está no quarto crescente, o triângulo TLS (sendo T um observador na Terra, L o centro da Lua e S o centro do Sol) é retângulo em L.

Sabendo que a medida do ângulo \hat{S} é $0,15^\circ$, pode-se afirmar que essa razão é igual a

- a) $\frac{1}{\text{sen } 0,15^\circ}$
- b) $\cos 0,15^\circ$
- c) $\text{tg } 0,15^\circ$
- d) $\frac{1}{\cos 0,15^\circ}$
- e) $\cos 89,85^\circ$

Instrução: Para responder às questões 28 e 29, considere o texto e a figura a seguir.

No primeiro semestre de 2023, houve um aumento considerável no número de queimadas na Amazônia. A figura a seguir, cujas medidas são dadas em quilômetros, representa uma região atingida por um incêndio.



○ 28. (UFSM) Qual é o perímetro, em quilômetros, da região atingida pelo incêndio?

- a) 1,5
- b) 1,6
- c) 1,8
- d) 2,0
- e) 2,3

○ 29. (UFSM) Qual é a área, em quilômetros quadrados, da região atingida pelo incêndio, usando $\sqrt{3} = 1,7?$

- a) 0,170
- b) 0,200
- c) 0,250
- d) 0,340
- e) 0,425

○ 30. (UFSM) A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.

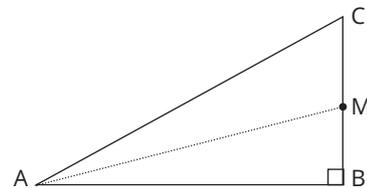


<http://maps.google.com.br>

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo \hat{A} mede 45° e o ângulo \hat{C} mede 75° . Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Essa distância, em km, é:

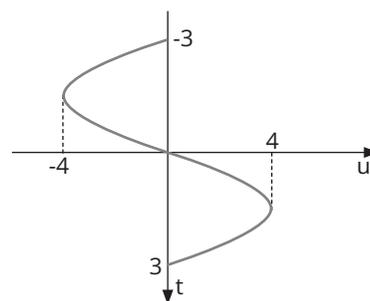
- a) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
- b) $4\sqrt{6}$
- c) $8\sqrt{2} + \sqrt{3}$
- d) $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
- e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

○ 31. (UFSM) A figura mostra um triângulo retângulo ABC. O segmento de reta AM é a bissetriz do ângulo \hat{A} . Se BM mede 1 m e AB mede 3 m, então a medida, em m, de MC é:



- a) 1,32
- b) 1,25
- c) 1,18
- d) 1,15
- e) 1,00

○ 32. (UFSM) Considere que o programa de computador que gerou as imagens da série *Uma família da pesada* tenha utilizado o gráfico de uma senoide $u(t) = A \sin(\omega t)$ para o posicionamento dos braços do personagem Peter, como mostra a figura a seguir.



Afirma-se, então:

- I - A amplitude é $A = 4$.
- II - O período da função $u(t)$ é 3.
- III - A frequência angular é $\omega = \pi$.

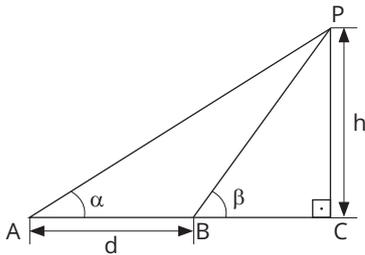
- a) apenas I.
- b) apenas II.
- c) apenas I e III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II e III.



○ 33. (UFSM) A soma das raízes da equação $\cos^2 x + \cos x = 0$, no intervalo $0 < x < 2\pi$, é:

- a) π
- b) 4π
- c) 3π
- d) $7\pi/2$
- e) $5\pi/2$

○ 34. (UFSM)

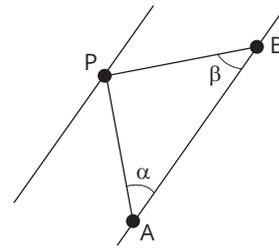


Para medir a altura de uma torre localizada em um terreno plano e horizontal, adotou-se o procedimento a seguir, que se encontra esquematizado na figura. Escolheram-se, no terreno, dois pontos A e B distantes d metros um do outro e alinhados com a base da torre C. Do ponto A, via-se o ponto P mais alto da torre, sob um ângulo de α graus com o plano horizontal. Do ponto B, via-se o ponto P sob um ângulo de β graus com o plano horizontal. A altura h da torre é, em metros,

- a) $d \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$
- b) $d \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$
- c) $d \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}$
- d) $\frac{1}{d} \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$
- e) $d \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}$

Anotações:

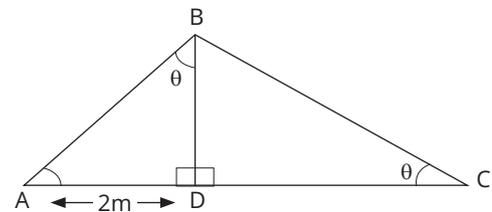
○ 35. (UFSM)



A figura ilustra um observador localizado no ponto A e outro, no ponto B, à beira de um rio de margens paralelas. Os dois conseguem ver uma pedra situada num ponto P da outra margem. Com seus teodolitos, eles medem os ângulos $\widehat{PAB} = \alpha$ e $\widehat{PBA} = \beta$. Sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = 4$, $\operatorname{tg} \beta = 5$ e $AB = 135$ m, pode-se afirmar que a largura do rio, em metros, é:

- a) 150
- b) 200
- c) 300
- d) 350
- e) 400

○ 36. (UFSM) Na figura, o ângulo θ é tal que $\operatorname{sen} \theta = 1/3$ e $AD = 2$ metros.



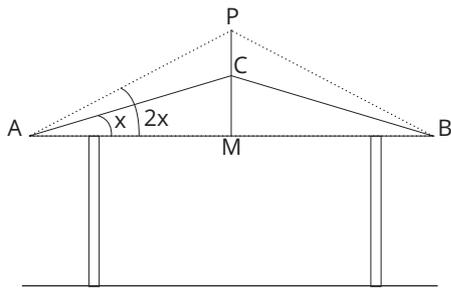
A área do triângulo ABC é, em m^2 ,

- a) $16\sqrt{2}$
- b) $18\sqrt{2}$
- c) $32\sqrt{2}$
- d) $36\sqrt{2}$
- e) $72\sqrt{2}$

○ 37. (UFSM) Um fio de antena está preso no topo de um prédio de 16 metros de altura e na cumeeira de uma casa ao lado, a 4 metros de altura. Considerando o terreno plano (horizontal) e sabendo que a distância entre a casa e o prédio é de 9 metros, o comprimento do fio é, em metros,

- a) 12
- b) 15
- c) $\sqrt{337}$
- d) 20
- e) 25

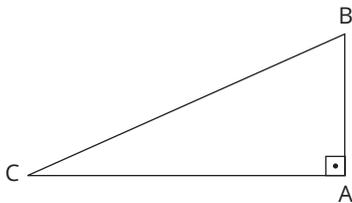
○ 38. (UFSM)



Devido à pouca inclinação, o telhado do depósito, representado pela figura, apresentava goteiras. Foi consultado um engenheiro que sugeriu levantar a cumeeira, de modo que o ângulo x passasse para $2x$. Sabendo que as medidas de AM e CM são, respectivamente, 12 m e 2 m, qual será, aproximadamente, a medida de PC?

- a) 1,88 m
- b) 2 m
- c) 2,11 m
- d) 2,30 m
- e) 3 m

○ 39. (UFSM) Um piloto de avião decola da cidade A, devendo alcançar a cidade B, ao Norte de A, distante 600 Km. Porém, um tempo após a decolagem, o piloto notou que, por engano, tinha tomado o rumo Oeste. Ele corrigiu a rota fazendo um giro de 150° à direita, num ponto C, conforme mostra a figura.



Assim, a distância, em quilômetros, que o avião voou, partindo de A até chegar a B, é:

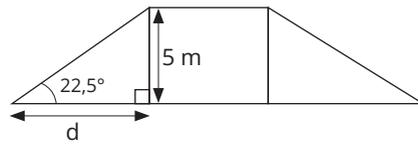
- a) $600\sqrt{3}$.
- b) $1200\sqrt{3}$.
- c) $600(1 + \sqrt{3})$.
- d) $100(12 + \sqrt{3})$.
- e) $600(2 + \sqrt{3})$.

○ 40. (UFSM) Para calcular a distância de um ponto B até um ponto inacessível, um observador escolheu um ponto A qualquer, desde que B e C possam ser vistos de A. Após, mediu as distâncias $AB = 50$ m e $AC = 80$ m e o ângulo $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Então a distância BC é igual a:

- a) 50
- b) 60
- c) 70
- d) 80
- e) 90

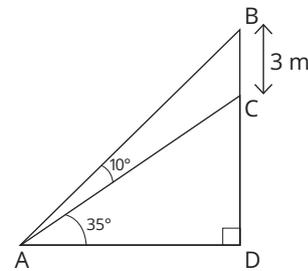
○ 41. (UFSM)



Para facilitar o trânsito em um cruzamento muito movimentado, será construída uma ponte sobre a qual passará uma das vias. A altura da via elevada, em relação à outra, deverá ser de 5,0m. O ângulo da inclinação da via elevada, em relação ao solo, deverá ser de $22,5^\circ$. A distância d , em metros, onde deve ser iniciada a rampa que dará acesso à ponte, medida a partir da margem da outra via, conforme mostra a figura, deverá ser de:

- a) $5(\sqrt{2} + 1)$
- b) $\frac{5}{2}(\sqrt{2} - 1)$
- c) $\frac{5}{3}(\sqrt{2} + 1)$
- d) $\frac{5}{3}(\sqrt{3} - 1)$
- e) $\frac{5}{4}(\sqrt{3} + 1)$

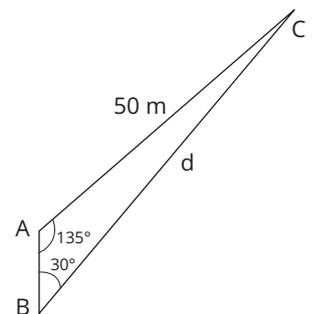
○ 42. (UFSM) Se $\operatorname{tg} 35^\circ = 0,7$ e $BC = 3$ m, então o comprimento do segmento CD, em metros, é



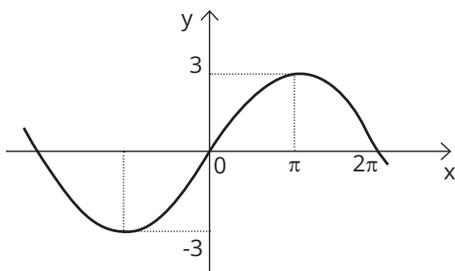
- a) 6,8
- b) 7
- c) 7,2
- d) 7,5
- e) 7,6

○ 43. (UFSM) Na instalação das lâmpadas da praça de alimentação, a equipe necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocadas nos vértices B e C do triângulo, segundo a figura. Assim, a distância "d" é

- a) $50\sqrt{2}$ m
- b) $50\frac{\sqrt{6}}{3}$ m
- c) $50\sqrt{3}$ m
- d) $25\sqrt{6}$ m
- e) $50\sqrt{6}$ m



○ 44. (UFSM) Um dos professores da escola utilizou um software para construir gráficos de funções. Sobre a função representada no gráfico é correto afirmar:



- a) O período da função é 2π .
- b) O domínio é o intervalo $[-3, 3]$
- c) A imagem é o conjunto \mathbb{R} .
- d) A função é par.
- e) A função é $y = 3 \sin x/2$

○ 45. (UFSM) Uma gráfico que confeccionou material de campanha determina o custo unitário de um de seus produtos, em reais, de acordo com a lei $C(t) = 200 + 120\sin\frac{\pi \cdot t}{2}$ com t medido em horas de trabalho. Assim, os custos máximo e mínimo desse produto são

- a) 320 e 200
- b) 200 e 120
- c) 200 e 80
- d) 320 e 80
- e) 120 e 80

○ 46. (UFSM) Sabendo-se que o conjunto imagem da função $f(x) = a + b \sin x$, com $b > 0$, é o intervalo fechado $[3,5]$, é correto afirmar que os valores de a e b são, respectivamente

- a) 4 e 1
- b) 3 e 5
- c) 5 e 3
- d) 1 e 4
- e) 7 e 6

○ 47. (UFSM) Em determinada cidade, a concentração diária, em gramas, de partículas de fósforo na atmosfera é medida pela função $C(t) = 3 + 2\sin(\pi t/6)$, em que t é a quantidade de horas para fazer essa medição. O tempo mínimo necessário para fazer uma medição que registrou 4 gramas de fósforo é de

- a) 1/2 hora.
- b) 1 hora.
- c) 2 horas.
- d) 3 horas.
- e) 4 horas.

○ 48. (UFSM) A função

$$N(t) = 308 - 280 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

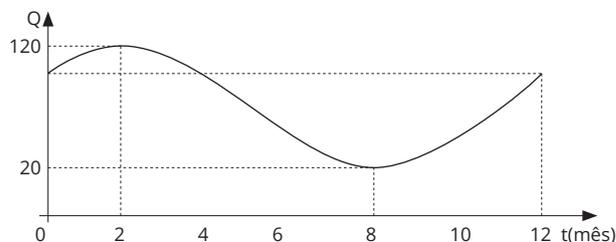
representa o número de casos de uma doença em certa região, em função do tempo t , em meses. Então, é correto afirmar:

- a) Inicialmente, o número de pessoas doentes é 308.
- b) O número máximo de casos ocorre, quando $t = 3$.
- c) O período da função N é 6.
- d) O menor valor de N é 28.
- e) O número de casos varia de 308 a 588.

○ 49. (UFSM) Entre os pontos A e C, localizados na margem de um lago, será estendido um cabo com bóias sinalizadoras que demarcará a parte permitida para o passeio de pedalinhos. Para a compra do material a ser utilizado, é necessário determinar a distância entre esses pontos. A medição direta da distância entre A e C não pode ser realizada, pois fica sobre a superfície do lago. Assim, marcou-se um ponto B intermediário, de modo que as distâncias entre A e B e entre B e C pudessem ser feitas sobre terra firme. Sabendo que a distância entre A e B é 100 metros, que a distância entre B e C é 60 metros e que o ângulo com vértice em B determinado por A, B e C é 120 graus, a distância entre A e C, em metros, é:

- a) 120.
- b) 140.
- c) 150.
- d) 155.
- e) 160.

○ 50. (UFSM)



O gráfico mostra a quantidade de animais que uma certa área de pastagem pode sustentar ao longo de 12 meses. Propõe-se a função $Q(t) = a \sin(b + ct) + d$ para descrever essa situação. De acordo com os dados, $Q(0)$ é igual a:

- a) 100.
- b) 97.
- c) 95.
- d) 92.
- e) 90.



○ 51. (UFSM) Em muitas cidades, os poluentes emitidos em excesso pelos veículos causam graves problemas a toda a população. Durante o inverno, a poluição demora mais para se dissipar na atmosfera, favorecendo o surgimento de doenças respiratórias.

Suponha que a função

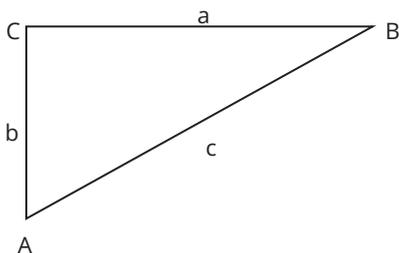
$$N(x) = 180 - 54 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 1)\right)$$

represente o número de pessoas com doenças respiratórias registrado num Centro de Saúde, com $x = 1$ correspondendo ao mês de janeiro, $x = 2$, o mês de fevereiro e assim por diante.

A soma do número de pessoas com doenças respiratórias registrado nos meses de janeiro, março, maio e julho é igual a:

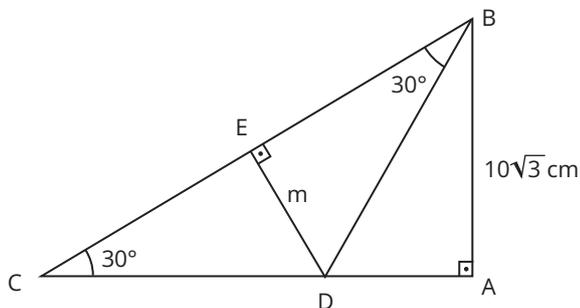
- a) 693.
- b) 720.
- c) 747.
- d) 774.
- e) 936.

○ 52. (UFRGS) Na figura, $A = 60^\circ$ e $B = 30^\circ$. A razão a/b vale:



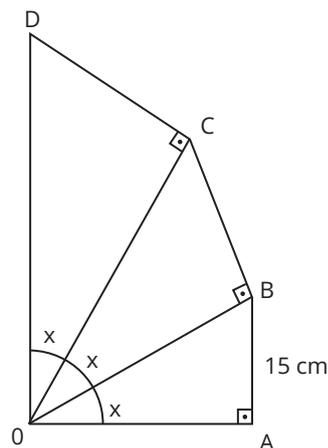
- a) 2
- b) 1/2
- c) $3/\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{3}/3$
- e) $\sqrt{3}$

○ 53. (UFSM) O valor m indicado na figura é igual a:



- a) $5\sqrt{3}$ cm
- b) 6 cm
- c) 8 cm
- d) 10 cm
- e) $10\sqrt{3}$ cm

○ 54. (UFSM) Na figura, os ângulos AOD , A , B e C são retos. A medida do segmento de reta CD , em cm, vale:



- a) $20\sqrt{3}$
- b) $60\sqrt{3}$
- c) 20
- d) 30
- e) 40

○ 55. (UFSM) Uma torre vertical, construída sobre um plano horizontal, tem 25 m de altura. Um cabo de aço, esticado, liga o topo da torre até o plano, fazendo com ele um ângulo de 60° . O comprimento do cabo de aço é:

- a) 50 m
- b) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ m
- c) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ m
- d) $\frac{50\sqrt{3}}{2}$ m
- e) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ m



HABILIDADES À PROVA 3

» Introdução à Análise Combinatória

○ 1. (ENEM) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e do slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

- a) 15
- b) 30
- c) 108
- d) 360
- e) 972



○ 2. (ENEM) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

○ 3. (ENEM) Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto), e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9). Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 14 jan. 2012 (adaptado).

Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a:

- a) $26^3 + 9^4$
- b) $26^3 \times 9^4$
- c) $26^3(10^4 - 1)$
- d) $(26^3 + 10^4) - 1$
- e) $(26^3 \times 10^4) - 1$

○ 4. (ENEM) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

- a) $\frac{62^6}{10^6}$
- b) $\frac{62!}{10!}$
- c) $\frac{62! 4!}{10! 56!}$
- d) $62! - 10!$
- e) $62^6 - 10^6$



○ 5. (ENEM) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras, e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão.

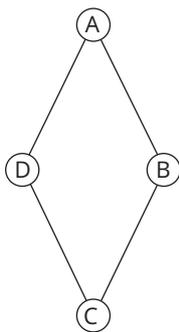
A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por:

- a) 6.
- b) 8.
- c) 12.
- d) 16.
- e) 24.

○ 6. (ENEM) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

- a) 6
- b) 12
- c) 18
- d) 24
- e) 36

○ 7. (ENEM) O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

- a) 14
- b) 18
- c) 20
- d) 21
- e) 23

○ 8. (ENEM) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existam 5 objetos e 6 personagens em uma casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor, e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

- a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

○ 9. (ENEM) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.



O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10

○ 10. (ENEM) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste em um conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0, e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita, irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda, irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

- a) 14
- b) 12
- c) 8
- d) 6
- e) 4

○ **11. (ENEM)** Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e que o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por:

- a) 100
- b) 90
- c) 80
- d) 25
- e) 20

○ **12. (ENEM 2020)** Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

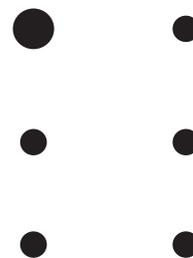
Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

- a) $4^5 - 4^4 - 4^3$
- b) $4^5 + 4^4 + 4^3$
- c) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$
- d) $(4!)^5$
- e) 4^5



○ **13. (ENEM)** A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.



Por exemplo, a letra A é representada por:

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é:

- a) 12
- b) 31
- c) 36
- d) 63
- e) 720

○ **14. (ENEM)** Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

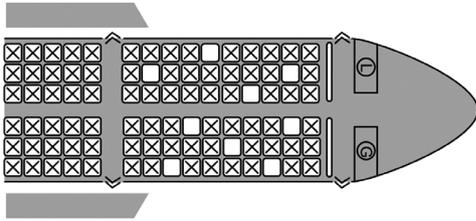
Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

- a) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!}$
- b) $9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$
- c) $9 \times \frac{4!}{(4-2)! \times 2!}$
- d) $9 \times \frac{2!}{(2-2)! \times 2!}$
- e) $9 \times \left(\frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1 \right)$



○ 15. (ENEM) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X, e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

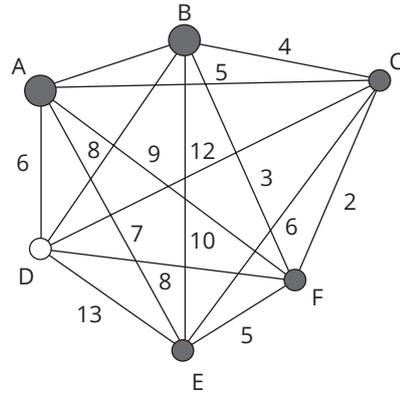
- a) $\frac{9!}{2!}$
- b) $\frac{9!}{7! \cdot 2!}$
- c) $7!$
- d) $\frac{5!}{2!} \cdot 4!$
- e) $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}$

○ 16. (ENEM) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

- a) 8.
- b) 9.
- c) 11.
- d) 18.
- e) 24.

○ 17. (ENEM) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes.

Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:

- a) 60min.
- b) 90min.
- c) 120min.
- d) 180min.
- e) 360min.

○ 18. (ENEM) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da Mega-Sena não é zero, mas é quase.

Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R\$ 1,50.

Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R\$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da Mega-Sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente:

- a) $1 \frac{1}{2}$ vez menor.
- b) $2 \frac{1}{2}$ vezes menor.
- c) 4 vezes menor.
- d) 9 vezes menor.
- e) 14 vezes menor.



○ **19. (ENEM)** O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é:

- a) 24
- b) 31
- c) 32
- d) 88
- e) 89

○ **20. (ENEM)** Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

T & C Amazônia, ano 1, nº 3, dez./2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores.

O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

- a) 1.320
- b) 2.090
- c) 5.845
- d) 6.600
- e) 7.245

○ **21. (ENEM)** Considere que um professor de Arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus nacionais	Museus internacionais
Masp - São Paulo	Louvre - Paris
MAM - São Paulo	Prado - Madri
Ipiranga - São Paulo	British Museum - Londres
Imperial - Petrópolis	Metropolitan - Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

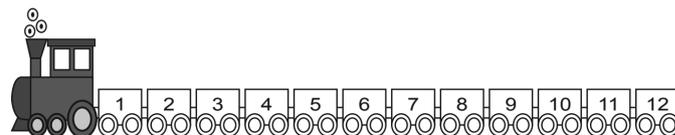
- a) 6
- b) 8
- c) 20
- d) 24
- e) 36

○ **22. (ENEM)** Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

- a) 69
- b) 70
- c) 90
- d) 104
- e) 105

○ **23. (ENEM)** Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por:

- a) $C_{12}^4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^3 \times C_{12}^2$
- b) $C_{12}^4 + C_8^3 + C_5^3 + C_2^2$
- c) $C_{12}^4 \times 2 \times C_8^3 \times C_5^2$
- d) $C_{12}^4 + 2 \times C_{12}^3 + C_{12}^2$
- e) $C_{12}^4 \times C_8^3 \times C_5^3 \times C_2^2$

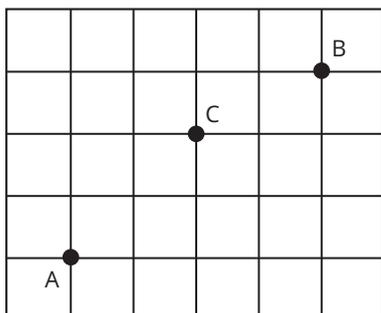


○ 24. (ENEM 2021) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

- a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$
- b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$
- c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$
- d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$
- e) $\frac{21!}{7!14!}$

○ 25. (ENEM 2020) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é:

- a) 4.
- b) 14.
- c) 17.
- d) 35.
- e) 48.

○ 26. (ENEM 2020) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e as consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por:

- a) 9!
- b) 4! 5!
- c) $2 \times 4! 5!$
- d) $\frac{9!}{2}$
- e) $\frac{4! 5!}{2}$

○ 27. (ENEM 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem seu nome, antes do símbolo @.

O e-mail terá a forma *****@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome fora um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

- a) 59
- b) 60
- c) 118
- d) 119
- e) 120

○ 28. (ENEM 2020) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

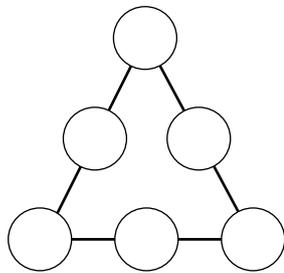
Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.

De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por:

- a) 5
- b) $5 \cdot 3$
- c) $\frac{5!}{(5-3)!}$
- d) $\frac{5!}{(5-3)!2!}$
- e) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$



○ **29. (ENEM 2023)** O triângulo da figura é denominado triângulo mágico. Nos círculos, escrevem-se os números de 1 a 6, sem repetição, com um número em cada círculo. O objetivo é distribuir os números de forma que as somas dos números em cada lado do triângulo sejam iguais.



Considere que os números colocados nos vértices do triângulo estejam em progressão aritmética de razão igual a 2.

Nas condições propostas, quais as possíveis soluções para as somas dos números que formam os lados do triângulo?

- a) Há somente uma solução possível, e as somas em cada lado do triângulo são iguais a 7.
- b) Há somente uma solução possível, e as somas em cada lado do triângulo são iguais a 9.
- c) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 7 e outra em que as somas são iguais a 9.
- d) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 9 e outra em que as somas são iguais a 12.
- e) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 10 e outra em que as somas são iguais a 11.

○ **30. (ENEM 2023)** Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

- algarismos de 0 a 9;
- 26 letras minúsculas do alfabeto;
- 26 letras maiúsculas do alfabeto;
- 6 caracteres especiais !, @, #, \$, , &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário:

- tipo I: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;
- tipo II: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;
- tipo III: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1 , p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o:

- a) tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.
- b) tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.
- c) tipo II, pois tem maior quantidade de letras.
- d) tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$.
- e) tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

○ **31. (UFSM)** Uma família composta de 7 pessoas deseja, por razões econômicas, enviar apenas 3 representantes a uma cerimônia de casamento. Se o pai e a mãe devem permanecer juntos, o número de maneiras diferentes de escolha dessas 3 pessoas é

- a) 5
- b) 10
- c) 15
- d) 20
- e) 25

○ **32. (UFSM)** O sistema de segurança de um laboratório utiliza um teclado numérico, conforme está ilustrado na figura.

O número de senhas com 4 dígitos, as quais não iniciam com o dígito zero é dado por



- a) 648
- b) 1.080
- c) 5.040
- d) 6.480
- e) 9.000

○ **33. (UFSM)** No código Morse, as “letras” são ponto e traço. Pode-se afirmar que o número de “palavras” de até 5 “letras” que podem ser formadas, é igual a

- a) 10
- b) 20
- c) 32
- d) 41
- e) 62



○ **34. (UFSM)** Numa Câmara de Vereadores, trabalham 6 vereadores do partido A, 5 vereadores do partido B e 4 vereadores do partido C. O número de comissões de 7 vereadores que podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 vereadores do partido A, 2 vereadores do partido B e 2 vereadores do partido C, é igual a:

- a) 7
- b) 36
- c) 152
- d) 1200
- e) 28800

○ **35. (UFSM)** São dados sete pontos distintos, A, B, C, D, E, F e G, sobre uma circunferência. Unindo esses pontos dois a dois, são determinadas _____ retas. O número de triângulos determinados por esses pontos é _____. Desses triângulos, exatamente _____ têm vértice no ponto A. A alternativa que preenche corretamente as lacunas é:

- a) 21, 70, 15
- b) 21, 35, 15
- c) 42, 35, 15
- d) 42, 70, 30
- e) 21, 70, 30

○ **36. (UFSM)** A quantidade de números naturais de cinco algarismos distintos que se pode formar com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6, de modo que os algarismos pares permaneçam juntos, é:

- a) 12
- b) 24
- c) 30
- d) 36
- e) 40

○ **37. (UFSM)** De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

- a) 12
- b) 30
- c) 42
- d) 240
- e) 5040

○ **38. (UFSM)** Analise as afirmativas a seguir.

I - O número de comissões de 3 pessoas que se pode formar num grupo de 5 pessoas é 60.

II - Com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, podem-se formar 125 números de 3 algarismos.

III - A quantidade de 7 bombons iguais pode ser repartida de 6 maneiras diferentes, em duas caixas idênticas, sem que nenhuma caixa fique vazia.

Está(ão) correta(s):

- a) apenas I.
- b) apenas II.
- c) apenas I e III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II e III.

○ **39. (UFSM)** Para ter acesso a uma sala reservada, cada usuário recebe um cartão de identificação com 4 listras coloridas, de modo que qualquer cartão deve diferir de todos os outros pela natureza das cores ou pela ordem das mesmas nas listras. Operando com 5 cores distintas e observando que listras vizinhas não tenham a mesma cor, quantos usuários podem ser identificados?

- a) 10
- b) 20
- c) 120
- d) 320
- e) 625

○ **40. (UFSM)** Rafael tem dinheiro para comprar dois picolés e um sorvete. De quantos modos pode fazer seu pedido numa sorveteria que oferece três sabores de picolé e quatro sabores de sorvete?

- a) 6
- b) 7
- c) 24
- d) 36
- e) 48

○ **41. (UFSM)** Na composição da chapa contendo o nome dos candidatos a prefeito e a vice-prefeito de uma determinada cidade, um partido apresenta 7 nomes, todos podendo ser escolhido para os referidos cargos. O número de possibilidades de composição da chapa é:

- a) 7!
- b) $\frac{7!}{5!}$
- c) $\frac{7!}{5!2!}$
- d) $\frac{7!}{2!}$
- e) 2!



○ **42. (UFSM)** Para efetuar suas compras, o usuário que necessita sacar dinheiro no caixa eletrônico deve realizar duas operações: digitar uma senha composta por 6 algarismos distintos e outra composta de 3 letras escolhidas num alfabeto de 26 letras. Se essa pessoa esqueceu a senha, mas lembra que 8, 6 e 4 fazem parte dos três primeiros algarismos e que as letras são todas vagais distintas, sendo E a primeira delas, o número máximo de tentativas necessárias para acessar sua conta será:

- a) 210
- b) 230
- c) 2520
- d) 3360
- e) 15120

○ **43. (UFSM)** No código Morse, as “letras” são ponto e traço. Pode-se afirmar que o número de palavras de até 5 “letras” que podem ser formadas, é igual a:

- a) 10
- b) 20
- c) 32
- d) 41
- e) 62

○ **44. (UFSM)** O setor de nutrição de determinada cantina sugere, para uma refeição rica em carboidratos, 4 tipos de macarrão, 3 tipos de molho e 5 tipos de queijo. O total de opções para quem vai servir um tipo de macarrão, um tipo de molho e três tipos de queijo é:

- a) $2 \cdot 5!$
- b) $5!$
- c) $(5!)^2$
- d) $5!/2$
- e) $2/5!$

○ **45. (UFSM)** Uma pequena fábrica produz 4 tipos diferentes de massas e 6 tipos diferentes de molhos. Uma possibilidade de venda que agrada aos consumidores é colocá-las numa cesta que contenha 2 embalagens de massa e 3 embalagens de molho. Quantas cestas diferentes podem ser montadas, de forma que contenham exatamente 2 embalagens de massa não necessariamente diferentes e 3 tipos diferentes de molhos?

- a) 1.820.
- b) 320.
- c) 240.
- d) 200.
- e) 120.

○ **46. (UFSM)** O mosaico, comum em obras de arte e calçadas, pode ser construído a partir da utilização de cores e formas desiguais. Um mosaico é constituído de 5 figuras distintas, sendo cada figura pintada de uma cor diferente. Utilizando-se 7 cores, quantos mosaicos diferentes poderão ser feitos?

- a) 7.
- b) 21.
- c) 35.
- d) 1.260.
- e) 2.520.

○ **47. (UFSM)** Na fase inicial dos jogos da Copa do Mundo 2010, na África do Sul, os 32 países participantes foram divididos em 8 grupos, e cada seleção jogou uma vez com todas as seleções de seu grupo. O número total de jogos, nessa fase, foi de:

- a) 24.
- b) 32.
- c) 48.
- d) 56.
- e) 64.

○ **48. (UFSM)** Na versão da série do *Glee do Safety Dance*, um grupo de atores dança no hall de um *shopping center*, enquanto os demais apenas observam. Suponha que, para a execução da cena, foi necessário escolher, dentre 6 atores e 8 atrizes, um grupo formado por 5 atores e 5 atrizes. Quantos grupos diferentes de dançarinos podem ser escolhidos dessa forma?

- a) 336.
- b) 168.
- c) 70.
- d) 48.
- e) 25.

○ **49. (UFSM)** A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

- a) 70
- b) 35
- c) 45
- d) 55
- e) 60



○ **50. (UFSM)** Em uma viagem de estudos realizada pelos alunos dos cursos de Matemática e Engenharia Mecânica da UFSM, observou-se que, dos 40 passageiros, 25 eram conhecidos entre si. Feitas as apresentações, os que não se conheciam apertaram-se as mãos, uns aos outros. O número de apertos de mão é:

- a) 156
- b) 200
- c) 210
- d) 300
- e) 480

○ **51. (UFSM)** Por ocasião da Feira de Ciências, 10 alunos da turma de Susanita foram incumbidos de monitorar as salas Meio Ambiente e Informática. A sala Meio Ambiente deve ter 6 monitores. Como um dos principais objetivos é desenvolver a capacidade de o aluno pensar, refletir e expressar seus conhecimentos perante os visitantes, todos deverão passar pelas duas salas. Assim, o número de maneiras diferentes que esses alunos podem ser distribuídos nas duas salas, sem que nenhum seja excluído é:

- a) 105
- b) 210
- c) 420
- d) 5.040
- e) 151.020



HABILIDADES À PROVA 4

» Probabilidade

○ 1. (ENEM) Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram essa postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



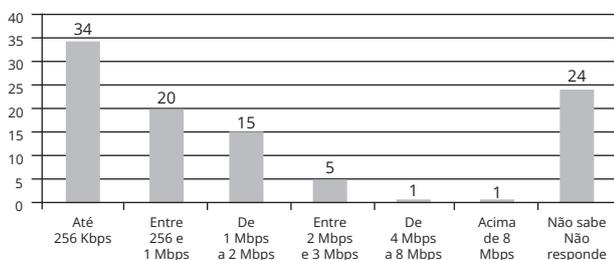
O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”.

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por:

- a) 0,09
- b) 0,12
- c) 0,14
- d) 0,15
- e) 0,18

○ 2. (ENEM) O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).

% domicílios segundo a velocidade de conexão à internet

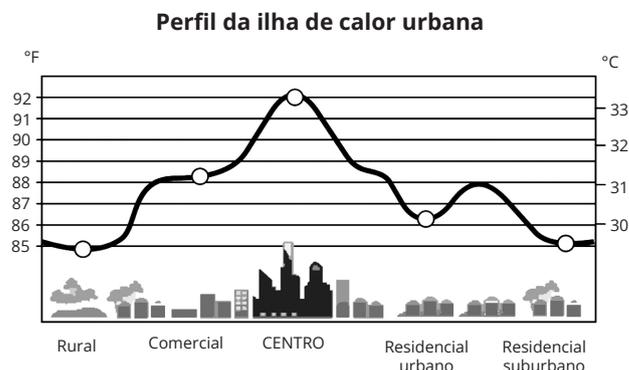


Disponível em: agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps nesse domicílio?

- a) 0,45
- b) 0,42
- c) 0,30
- d) 0,22
- e) 0,15

○ 3. (ENEM) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial urbano ou Residencial suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

- a) 1/5
- b) 1/4
- c) 2/5
- d) 3/5
- e) 3/4

○ 4. (ENEM) O diretor de um colégio leu em uma revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

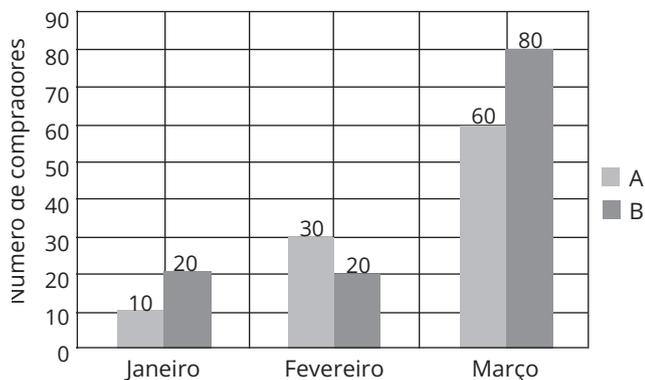
Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

- a) 1/3
- b) 1/5
- c) 2/5
- d) 5/7
- e) 5/14



○ 5. (ENEM) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

- a) $\frac{1}{20}$
- b) $\frac{3}{242}$
- c) $\frac{5}{22}$
- d) $\frac{6}{25}$
- e) $\frac{7}{15}$

○ 6. (ENEM) Em uma escola com 1.200 alunos, foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento deles em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

Nessa pesquisa, constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{5}{8}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{5}{6}$
- e) $\frac{5}{14}$

○ 7. (ENEM) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso.

Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1.000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1.000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como:

- a) excelente.
- b) bom.
- c) regular.
- d) ruim.
- e) péssimo.

○ 8. (ENEM) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4, e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

- a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
- b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
- c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
- d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
- e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.



○ 9. (ENEM) Uma locadora possui disponíveis 120 veículos da categoria que um cliente pretende locar. Desses, 20% são da cor branca, 40% são da cor cinza, 16 veículos são da cor vermelha, e o restante, de outras cores. O cliente não gosta da cor vermelha e ficaria contente com qualquer outra cor, mas o sistema de controle disponibiliza os veículos sem levar em conta a escolha da cor pelo cliente.

Disponibilizando aleatoriamente, qual é a probabilidade de o cliente ficar contente com a cor do veículo?

- a) $\frac{16}{120}$
- b) $\frac{32}{120}$
- c) $\frac{72}{120}$
- d) $\frac{101}{120}$
- e) $\frac{104}{120}$

○ 10. (ENEM) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida).

O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada.

Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é:

- a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
- b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
- e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

○ 11. (ENEM) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emilio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

- a) 8%
- b) 9%
- c) 11%
- d) 12%
- e) 22%

○ 12. (ENEM) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

- a) $\frac{1}{100}$
- b) $\frac{19}{100}$
- c) $\frac{20}{100}$
- d) $\frac{21}{100}$
- e) $\frac{8}{100}$



○ 13. (ENEM) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Porém, em vez de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

- a) 23,7%
- b) 30,0%
- c) 44,1%
- d) 65,7%
- e) 90,0%

○ 14. (ENEM) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1. Paciente TEM a doença, e o resultado do teste é POSITIVO.
2. Paciente TEM a doença, e o resultado do teste é NEGATIVO.
3. Paciente NÃO TEM a doença, e o resultado do teste é POSITIVO.
4. Paciente NÃO TEM a doença, e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. Epidemiologia: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de:

- a) 47,5%
- b) 85,0%
- c) 86,3%
- d) 94,4%
- e) 95,0%

○ 15. (ENEM) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é:

- a) 0,02048
- b) 0,08192
- c) 0,24000
- d) 0,40960
- e) 0,49152

○ 16. (ENEM) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

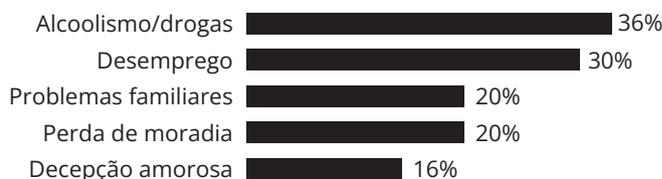
- a) $2 \times (0,2\%)^4$
- b) $4 \times (0,2\%)^2$
- c) $6 \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$
- d) $4 \times (0,2\%)$
- e) $6 \times (0,2\%) \times (99,8\%)$

○ 17. (ENEM)

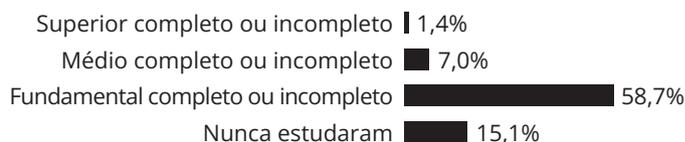
A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31.922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1 vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7 se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir.

Por que vive na rua?



Escolaridade



Istoé, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

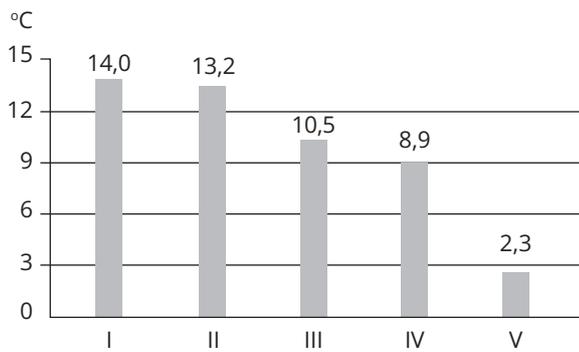
No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a:

- a) 12%
- b) 16%
- c) 20%
- d) 36%
- e) 52%



○ 18. (ENEM)

Temperatura do pescado nas peixarias



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2°C e 4°C. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{5}$
- e) $\frac{1}{6}$

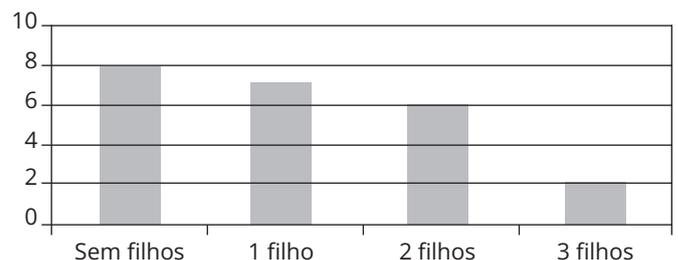
○ 19. (ENEM) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela adiante apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

Pacientes	Problemas respiratórios causados pelas queimadas	Problemas respiratórios resultantes de outras causas	Outras doenças	Total
Idosos	50	150	60	260
Crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a:

- a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
- b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.
- c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.
- d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
- e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

○ 20. (ENEM) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir.

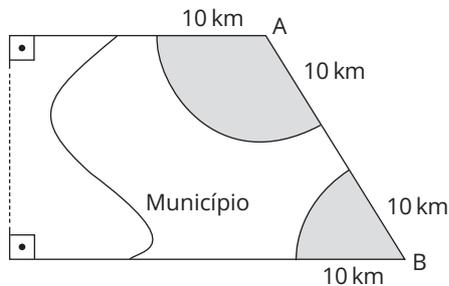


Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{7}{15}$
- d) $\frac{7}{23}$
- e) $\frac{7}{25}$



○ 21. (ENEM) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:

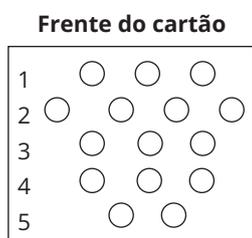


Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente:

- a) 20%
- b) 25%
- c) 30%
- d) 35%
- e) 40%

○ 22. (ENEM) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:



Verso do cartão

Como jogar:

- Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
- Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas.
- Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
- Se encontrar um "x" em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
- Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas, terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de "X" distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão, existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é:

- a) $\frac{1}{27}$
- b) $\frac{1}{36}$
- c) $\frac{1}{54}$
- d) $\frac{1}{72}$
- e) $\frac{7}{108}$

○ 23. (ENEM) No próximo fim de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30%, e a de chover no domingo é de 25%.

A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de:

- a) 5,0%
- b) 7,5%
- c) 22,5%
- d) 30,0%
- e) 75,0%

○ 24. (ENEM) O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro.

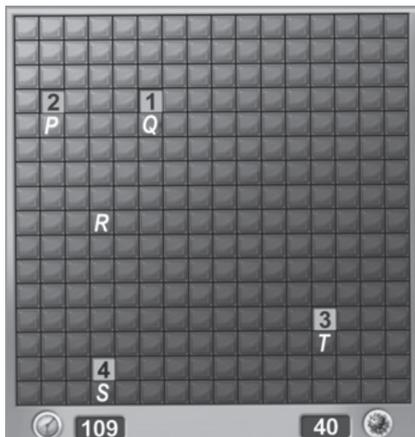
Número de frutos	Probabilidade
0	0,65
1	0,15
2	0,13
3	0,03
4	0,03
5 ou mais	0,01

A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a:

- a) 3%
- b) 7%
- c) 13%
- d) 16%
- e) 20%



○ 25. (ENEM) A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16x16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40, no canto inferior direito, é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra:

- a) P.
- b) Q.
- c) R.
- d) S.
- e) T.

○ 26. (ENEM) Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$, e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

- a) $\frac{10 \times 2}{3^{10}}$
- b) $\frac{10 \times 2^9}{3^{10}}$
- c) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$
- d) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$
- e) $\frac{2}{3^{10}}$

○ 27. (ENEM) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

- a) 0,075
- b) 0,150
- c) 0,325
- d) 0,600
- e) 0,800



○ 28. (ENEM) Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos, e, na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala.

Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

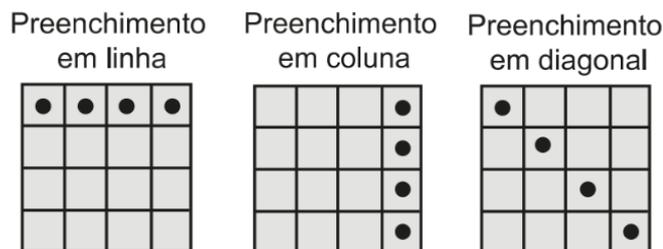
- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{1}{18}$
- c) $\frac{1}{40}$
- d) $\frac{1}{54}$
- e) $\frac{7}{18}$

Anotações:



○ 29. (ENEM) Em um jogo de bingo, as cartelas contêm 16 quadrículas dispostas em linhas e colunas. Cada quadrícula tem impresso um número, dentre os inteiros de 1 a 50, sem repetição de número. Na primeira rodada, um número é sorteado, aleatoriamente, dentre os 50 possíveis. Em todas as rodadas, o número sorteado é descartado e não participa dos sorteios das rodadas seguintes. Caso o jogador tenha em sua cartela o número sorteado, ele o assinala na cartela. Ganha o jogador que primeiro conseguir preencher quatro quadrículas que formam uma linha, uma coluna ou uma diagonal, conforme os tipos de situações ilustradas na Figura 1.

Figura 1



O jogo inicia e, nas quatro primeiras rodadas, foram sorteados os seguintes números: 03, 27, 07 e 48. Ao final da quarta rodada, somente Pedro possuía uma cartela que continha esses quatro números sorteados, sendo que todos os demais jogadores conseguiram assinalar, no máximo, um desses números em suas cartelas. Observe na Figura 2 o cartão de Pedro após as quatro primeiras rodadas.

Figura 2

03	48	12	27
49	11	22	05
29	50	19	45
33	23	38	07

A probabilidade de Pedro ganhar o jogo em uma das duas próximas rodadas é

- a) $\frac{1}{46} + \frac{1}{45}$
- b) $\frac{1}{46} + \frac{2}{46 \times 45}$
- c) $\frac{1}{46} + \frac{8}{46 \times 45}$
- d) $\frac{1}{46} + \frac{43}{46 \times 45}$
- e) $\frac{1}{46} + \frac{49}{46 \times 45}$

○ 30. (ENEM) A World Series é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão.

Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\frac{1}{2}$.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da World Series?

- a) $\frac{35}{64}$
- b) $\frac{40}{64}$
- c) $\frac{42}{64}$
- d) $\frac{44}{64}$
- e) $\frac{52}{64}$

○ 31. (ENEM) A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é:

- a) 0,15.
- b) 0,30.
- c) 0,50.
- d) 1,11.
- e) 2,22.



○ **32. (ENEM 2021)** O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, $\frac{1}{2}$ de probabilidade de acertar um dardo no alvo.

A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a $\frac{9}{10}$. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é:

- a) 2.
- b) 4.
- c) 6.
- c) 9.
- e) 10.

○ **33. (ENEM 2020)** Um apostador deve escolher uma entre cinco moedas ao acaso e lançá-la sobre uma mesa, tentando acertar qual resultado (cara ou coroa) sairá na face superior da moeda.

Suponha que as cinco moedas que ele pode escolher sejam diferentes:

- duas delas têm “cara” nas duas faces;
- uma delas tem “coroa” nas duas faces;
- duas delas são normais (cara em uma face e coroa na outra).

Nesse jogo, qual é a probabilidade de o apostador obter uma face “cara” no lado superior da moeda lançada por ele?

- a) $\frac{1}{8}$
- b) $\frac{2}{5}$
- c) $\frac{3}{5}$
- d) $\frac{3}{4}$
- e) $\frac{4}{5}$

○ **34. (ENEM)** Uma empresa sorteia prêmios entre os funcionários como reconhecimento pelo tempo trabalhado. A tabela mostra a distribuição de frequência de 20 empregados dessa empresa que têm de 25 a 35 anos trabalhados. A empresa sorteou, entre esses empregados, uma viagem de uma semana, sendo dois deles escolhidos aleatoriamente.

Tempo de serviço	Número de empregados
25	4
27	1
29	2
30	2
32	3
34	5
35	3

Qual a probabilidade de que ambos os sorteados tenham 34 anos de trabalho?

- a) $\frac{1}{20}$
- b) $\frac{1}{19}$
- c) $\frac{1}{16}$
- d) $\frac{2}{20}$
- e) $\frac{5}{20}$

○ **35. (ENEM)** Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos.

Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

- a) $\frac{1}{16}$
- b) $\frac{3}{16}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{3}{8}$
- e) $\frac{1}{2}$



○ **36. (ENEM)** O dono de um restaurante situado às margens de uma rodovia percebeu que, ao colocar uma placa de propaganda de seu restaurante ao longo da rodovia, as vendas aumentaram. Pesquisou junto aos seus clientes e concluiu que a probabilidade de um motorista perceber uma placa de anúncio é $\frac{1}{2}$. Com isso, após autorização do órgão competente, decidiu instalar novas placas com anúncios de seu restaurante ao longo dessa rodovia, de maneira que a probabilidade de um motorista perceber pelo menos uma das placas instaladas fosse superior a $\frac{99}{100}$.

A quantidade mínima de novas placas de propaganda a serem instaladas é:

- a) 99.
- b) 51.
- c) 50.
- d) 6.
- e) 1.

○ **37. (ENEM)** Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

- a) 0,0500
- b) 0,1000
- c) 0,1125
- d) 0,3125
- e) 0,5000

○ **38. (ENEM)** No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{8}$
- d) $\frac{2}{9}$
- e) $\frac{3}{8}$

○ **39. (ENEM)** Em um colégio público, a admissão no primeiro ano se dá por sorteio. Neste ano há 55 candidatos, cujas inscrições são numeradas de 01 a 55. O sorteio de cada número de inscrição será realizado em etapas, utilizando-se duas urnas. Da primeira urna será sorteada uma bola, dentre bolas numeradas de 0 a 9, que representará o algarismo das unidades do número de inscrição a ser sorteado e, em seguida, da segunda urna, será sorteada uma bola para representar o algarismo das dezenas desse número. Depois do primeiro sorteio, e antes de se sortear o algarismo das dezenas, as bolas que estarão presentes na segunda urna serão apenas aquelas cujos números formam, com o algarismo já sorteado, um número de 01 a 55.

As probabilidades de os candidatos de inscrição número 50 e 02 serem sorteados são, respectivamente,

- a) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{60}$
- b) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{50}$
- c) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{10}$
- d) $\frac{1}{55}$ e $\frac{1}{54}$
- e) $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{100}$

○ **40. (ENEM)** Visando atrair mais clientes, o gerente de uma loja anunciou uma promoção em que cada cliente que realizar uma compra pode ganhar um voucher para ser usado em sua próxima compra. Para ganhar seu voucher, o cliente precisa retirar, ao acaso, uma bolinha de dentro de cada uma das duas urnas A e B disponibilizadas pelo gerente, nas quais há apenas bolinhas pretas e brancas. Atualmente, a probabilidade de se escolher, ao acaso, uma bolinha preta na urna A é igual a 20% e a probabilidade de se escolher uma bolinha preta na urna B é 25%. Ganha o voucher o cliente que retirar duas bolinhas pretas, uma de cada urna.

Com o passar dos dias, o gerente percebeu que, para a promoção ser viável aos negócios, era preciso alterar a probabilidade de acerto do cliente sem alterar a regra da promoção. Para isso, resolveu alterar a quantidade de bolinhas brancas na urna B de forma que a probabilidade de um cliente ganhar o voucher passasse a ser menor ou igual a 1%. Sabe-se que a urna B tem 4 bolinhas pretas e que, em ambas as urnas, todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem retiradas.

Qual é o número mínimo de bolinhas brancas que o gerente deve adicionar à urna B?

- a) 20
- b) 60
- c) 64
- d) 68
- e) 80



○ **41. (UFSM)** A tabela a seguir mostra o número de internações hospitalares da população idosa (ou mais anos de idade), numa determinada região, de acordo com as causas da internação.

Causas	Nº de internações
Doenças cardíacas	80
Doenças cerebrovasculares	49
Doenças pulmonares	43
Doenças renais	42
Diabetes melito	35
Fraturas de fêmur e ossos dos membros	26
Hipertensão arterial	24
Infecção de pele e tecido subcutâneo	11
Pneumonia bacteriana	77
Úlcera	13

Considere que hipertensão arterial, doenças renais, doenças cardíacas e osteoporose estão associadas ao consumo excessivo de sódio e que as fraturas de fêmur e ossos dos membros são causadas pela osteoporose. Assim, a probabilidade de um idoso internado, escolhido ao acaso, ter como diagnóstico principal uma doença associada ao consumo excessivo de sódio, de acordo com a tabela, é igual a:

- a) 0,430.
- b) 0,370.
- c) 0,365.
- d) 0,325.
- e) 0,230.

○ **42. (UFSM)** A tabela mostra o resultado de uma pesquisa sobre tipos sanguíneos em que foram testadas 600 pessoas.

Tipo de sangue	O ⁺	A ⁺	B ⁺	AB ⁺	O ⁻	A ⁻	B ⁻	AB ⁻
Número de pessoas	228	216	48	15	30	48	12	3

Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter sangue do tipo A⁺ ou A⁻?

- a) $\frac{2}{25}$
- b) $\frac{11}{50}$
- c) $\frac{9}{25}$
- d) $\frac{19}{50}$
- e) $\frac{11}{25}$

○ **43. (UFSM)** Em uma bandeja há dez pastéis dos quais três são de carne, três de queijo e quatro de camarão. Se Fabiana retirar, aleatoriamente e sem reposição, dois pastéis desta bandeja, a probabilidade de os dois pastéis retirados serem de camarão é:

- a) 3/25
- b) 4/25
- c) 2/15
- d) 2/
- e) 4/5



HABILIDADES À PROVA 5

» Porcentagem

○ 1. (ENEM) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R\$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

- a) 15,00
- b) 14,00
- c) 10,00
- d) 5,00
- e) 4,00

○ 2. (ENEM) O contribuinte que vende mais de R\$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R\$ 34 mil um lote de ações que custou R\$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de:

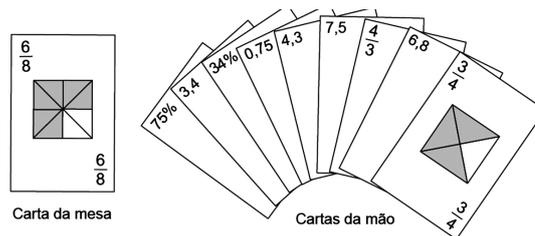
- a) R\$ 900,00
- b) R\$ 1.200,00
- c) R\$ 2.100,00
- d) R\$ 3.900,00
- e) R\$ 5.100,00

○ 3. (ENEM) Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente:

- a) 1,8 t - 8,4 t - 1,8 t
- b) 3,0 t - 6,0 t - 3,0 t
- c) 2,4 t - 7,2 t - 2,4 t
- d) 3,6 t - 4,8 t - 3,6 t
- e) 4,2 t - 3,6 t - 4,2 t

○ 4. (ENEM) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa, e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:



Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

- a) 9
- b) 7
- c) 5
- d) 4
- e) 3

○ 5. (ENEM) Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles. O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente:

- a) A - A - A - A
- b) A - B - A - B
- c) A - B - B - A
- d) B - A - A - B
- e) B - B - B - B



○ 6. (ENEM) De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente:

- ▶ 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes;
- ▶ 33% são utilizados em descarga de banheiro;
- ▶ 27% são para cozinhar e beber;
- ▶ 15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia.

O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água:

- a) 30,0
- b) 69,6
- c) 100,4
- d) 130,4
- e) 170,0

○ 7. (ENEM) Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido.

Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R\$ 3.800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de:

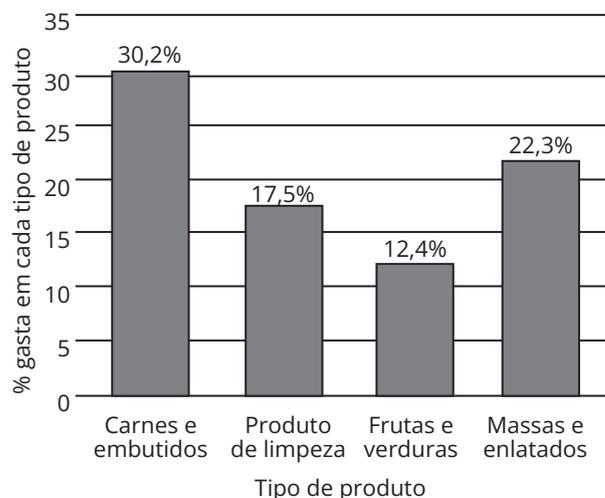
- a) R\$ 4.222,22
- b) R\$ 4.523,80
- c) R\$ 5.000,00
- d) R\$ 13.300,00
- e) R\$ 17.100,00

○ 8. (ENEM) Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados, e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

- a) 16%
- b) 24%
- c) 32%
- d) 48%
- e) 64%

○ 9. (ENEM) Uma dona de casa vai ao supermercado fazer a compra mensal. Ao concluir a compra, observa que ainda lhe restaram R\$ 88,00. Seus gastos foram distribuídos conforme mostra o gráfico. As porcentagens apresentadas no gráfico são referentes ao valor total, em reais, reservado para a compra mensal.



Qual o valor total, em reais, reservado por essa dona de casa para a compra mensal?

- a) 106,80
- b) 170,40
- c) 412,00
- d) 500,00
- e) 588,00

○ 10. (ENEM) O tipo mais comum de bebida encontrado nos supermercados não é o suco, mas o néctar de frutas. Os fabricantes de bebida só podem chamar de suco os produtos que tiverem pelo menos 50% de polpa, a parte comestível da fruta. Já o néctar de frutas é mais doce e tem entre 20% e 30% de polpa de frutas.

Superinteressante, São Paulo, ago. 2011.

Uma pessoa vai ao supermercado e compra uma caixa de 1 litro de bebida. Em casa, ela percebe que, na embalagem, está escrito "néctar de frutas com 30% de polpa". Se essa caixa fosse realmente de suco, necessitaria de um aumento percentual de polpa de, aproximadamente:

- a) 20%
- b) 67%
- c) 80%
- d) 167%
- e) 200%



○ 11. (ENEM) Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1 : 8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%.

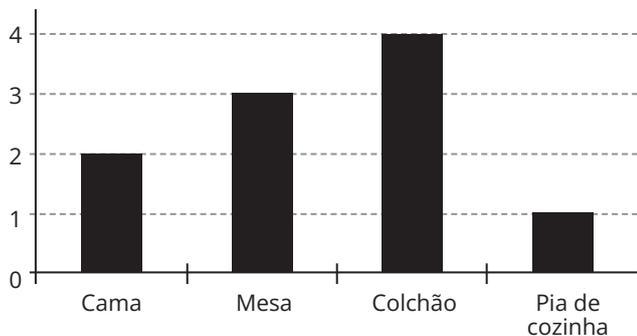
A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente:

- a) 22,00 cm, 12,00 cm e 5,00 cm.
- b) 27,50 cm, 15,00 cm e 6,25 cm.
- c) 34,37 cm, 18,75 cm e 7,81 cm.
- d) 35,20 cm, 19,20 cm e 8,00 cm.
- e) 44,00 cm, 24,00 cm e 10,00 cm.

○ 12. (ENEM) Para atrair uma clientela, uma loja de móveis fez uma promoção oferecendo um desconto de 20% em alguns de seus produtos.

No gráfico, estão relacionadas as quantidades vendidas de cada um dos produtos, em um dia de promoção.

Quantidade vendida de cada produto



No quadro, constam os preços de cada produto vendido já com desconto de 20% oferecido pela loja.

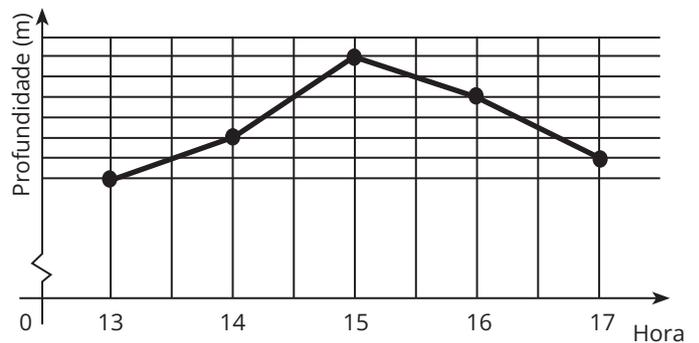
Móvel	Preço (R\$)
Cama	450,00
Mesa	300,00
Colchão	350,00
Pia de cozinha	400,00

Qual foi o valor total de desconto, em reais, concedido pela loja com a venda desses produtos durante esse dia de promoção?

- a) 300,00
- b) 375,00
- c) 720,00
- d) 900,00
- e) 1.125,00

○ 13. (ENEM) Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h , registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h , cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.

Registro de profundidade



Foi informado que, entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%.

Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

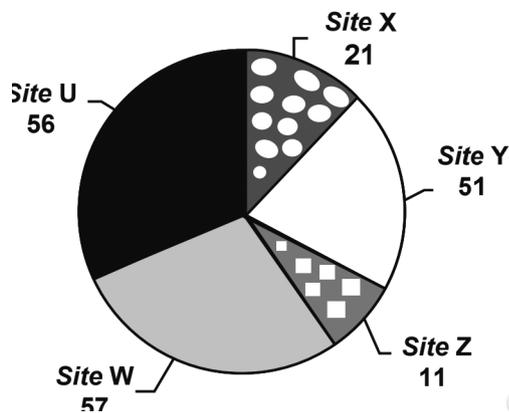
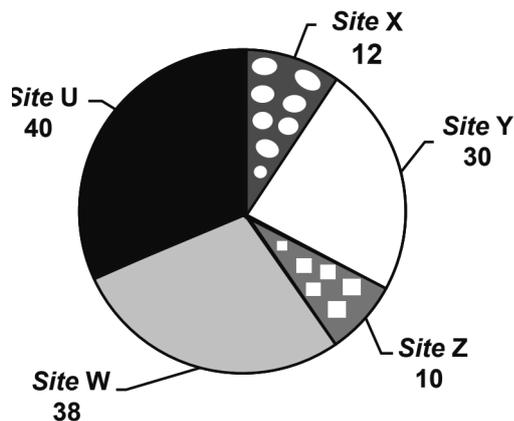
- a) 18
- b) 20
- c) 24
- d) 36
- e) 40

Anotações:



○ 14. (ENEM) Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta, foi criado um miniaplicativo de computador, que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco sites visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco sites mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.

Tempo de acesso na sexta-feira (minuto)

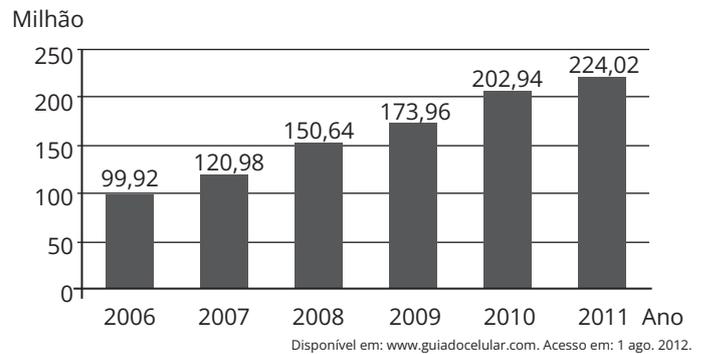


Tempo de acesso no sábado (minuto)

Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no site:

- a) X
- b) Y
- c) Z
- d) W
- e) U

○ 15. (ENEM) O gráfico mostra a expansão da base de assinantes de telefonia celular no Brasil, em milhões de unidades, no período de 2006 a 2011.



De acordo com o gráfico, a taxa de crescimento do número de aparelhos celulares no Brasil, de 2007 para 2011, foi de:

- a) 8,53%
- b) 85,17%
- c) 103,04%
- d) 185,17%
- e) 345,00%

○ 16. (ENEM) Em certa loja de roupas, o lucro na venda de uma camiseta é de 25% do preço de custo da camiseta pago pela loja. Já o lucro na venda de uma bermuda é de 30% do preço de custo da bermuda, e, na venda de uma calça, o lucro é de 20% sobre o preço de custo da calça. Um cliente comprou nessa loja duas camisetas, cujo preço de custo foi R\$ 40,00 cada uma, uma bermuda, que teve preço de custo de R\$ 60,00 e duas calças, ambas com mesmo preço de custo. Sabe-se que, com essa compra, o cliente proporcionou um lucro de R\$ 78,00 para a loja.

Considerando essas informações, qual foi o preço de custo, em real, pago por uma calça?

- a) 90
- b) 100
- c) 125
- d) 195
- e) 200

○ 17. (ENEM) Um médico faz o acompanhamento clínico de um grupo de pessoas que realizam atividades físicas diariamente. Ele observou que a perda média de massa dessas pessoas para cada hora de atividade física era de 1,5 kg. Sabendo que a massa de 1 L de água é de 1 kg, ele recomendou que ingerissem, ao longo das 3 horas seguintes ao final da atividade, uma quantidade total de água correspondente a 40% a mais do que a massa perdida na atividade física, para evitar desidratação.

Seguindo a recomendação médica, uma dessas pessoas ingeriu, certo dia, um total de 1,7 L de água após terminar seus exercícios físicos.

Para que a recomendação médica tenha efetivamente sido respeitada, a atividade física dessa pessoa, nesse dia, durou:

- a) 30 minutos ou menos.
- b) mais de 35 e menos de 45 minutos.
- c) mais de 45 e menos de 55 minutos.
- d) mais de 60 e menos de 70 minutos.
- e) 70 minutos ou mais.



○ **18. (ENEM)** Para pintar um automóvel, cuja cor é personalizada, a oficina encarregada de fazer o serviço terá de, por meio de uma mistura adequada de tintas, compor tons de azul e de branco. O tom azul representa 40% dessa mistura. Sabe-se, ainda, que a oficina deverá adquirir somente a tinta de tom azul, pois já possui, em seus estoques, 6 litros da tinta de tom branco, que serão totalmente utilizados na referida composição.

A quantidade, em litros, de tom azul que a oficina deverá adquirir para compor essa mistura, sem que haja sobras, é:

- a) 2,4.
- b) 3,6.
- c) 4,0.
- d) 9,0.
- e) 10,0.

○ **19. (ENEM)** Em janeiro de 2013, foram declaradas 1.794.272 admissões e 1.765.372 desligamentos no Brasil, ou seja, foram criadas 28.900 vagas de emprego, segundo dados do Cadastro Geral de Empregados e Desempregados (Caged), divulgados pelo Ministério do Trabalho e Emprego (MTE). Segundo o Caged, o número de vagas criadas em janeiro de 2013 sofreu uma queda de 75%, quando comparado com o mesmo período de 2012.

Disponível em: <http://portal.mte.gov.br>. Acesso em: 23 fev. 2013 (adaptado).

De acordo com as informações dadas, o número de vagas criadas em janeiro de 2012 foi:

- a) 16.514.
- b) 86.700.
- c) 115.600.
- d) 441.343.
- e) 448.568.

○ **20. (ENEM)** Três sócios resolveram fundar uma fábrica. O investimento inicial foi de R\$ 1.000.000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial.

Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R\$ 800.000,00 na fábrica. Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor. Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito. Os sócios decidiram então dividir o montante de R\$ 1.800.000,00, obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio.

Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?

- a) 29,60 e 11,11.
- b) 28,70 e 13,89.
- c) 25,00 e 25,00.
- d) 18,52 e 11,11.
- e) 12,96 e 13,89.

○ **21. (ENEM)** Uma concessionária de automóveis revende atualmente três marcas de veículos, A, B e C, que são responsáveis por 50%, 30% e 20%, respectivamente, de sua arrecadação. Atualmente, o faturamento médio mensal dessa empresa é de R\$ 150.000,00. A direção dessa empresa estima que, após uma campanha publicitária a ser realizada, ocorrerá uma elevação de 20%, 30% e 10% na arrecadação com as marcas A, B e C, respectivamente.

Se os resultados estimados na arrecadação forem alcançados, o faturamento médio mensal da empresa passará a ser de:

- a) R\$ 180.000,00
- b) R\$ 181.500,00
- c) R\$ 187.500,00
- d) R\$ 240.000,00
- e) R\$ 257.400,00

○ **22. (ENEM)** O colesterol total de uma pessoa é obtido pela soma da taxa do seu “colesterol bom” com a taxa do seu “colesterol ruim”. Os exames periódicos, realizados em um paciente adulto, apresentaram taxa normal de “colesterol bom”, porém, taxa do “colesterol ruim” (também chamado LDL) de 280 mg/dl.

O quadro apresenta uma classificação de acordo com as taxas LDL em adultos.

Taxa de LDL (mg/dl)	
Ótima	Menor do que 100
Próxima de ótima	De 100 a 129
Limite	De 130 a 159
Alta	De 160 a 189
Muito alta	Mais de 190

Disponível em: www.minhavida.com.br. Acesso em: 15 out 2015 (adaptado).

O paciente, seguindo as recomendações médicas sobre estilo de vida e alimentação, realizou o exame logo após o primeiro mês, e a taxa de LDL reduziu 25%. No mês seguinte, realizou novo exame e constatou uma redução de mais 20% na taxa de LDL.

De acordo com o resultado do segundo exame, a classificação da taxa de LDL do paciente é:

- a) ótima.
- b) próxima de ótima.
- c) limite.
- d) alta.
- e) muito alta.



○ 23. (ENEM) O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei nº 8.213/91, que dispõe:

Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5% (cinco por cento) dos seus cargos com beneficiários reabilitados ou pessoas com deficiência, habilitadas, na seguinte proporção:

- I. até 200 empregados..... 2%;
- II. de 201 a 500 empregados..... 3%;
- III. de 501 a 1.000 empregados..... 4%;
- IV. de 1.001 em diante..... 5%.

Disponível em: www.planalto.gov.br. Acesso em: 3 fev. 2015.

Constatou-se que a empresa possui 1.200 funcionários, dos quais 10 são reabilitados ou com deficiência, habilitados.

Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no artigo 93.

O número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é:

- a) 74
- b) 70
- c) 64
- d) 60
- e) 53



○ 24. (ENEM) A mensagem digitada no celular, enquanto você dirige, tira a sua atenção e, por isso, deve ser evitada. Pesquisas mostram que um motorista que dirige um carro a uma velocidade constante percorre "às cegas" (isto é, sem ter visão da pista) uma distância proporcional ao tempo gasto ao olhar para o celular durante a digitação da mensagem. Considere que isso de fato aconteça. Suponha que dois motoristas (X e Y) dirigem com a mesma velocidade constante e digitam a mesma mensagem em seus celulares. Suponha, ainda, que o tempo gasto pelo motorista X olhando para seu celular enquanto digita a mensagem corresponde a 25% do tempo gasto pelo motorista Y para executar a mesma tarefa.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 21 jul. 2012 (adaptado).

A razão entre as distâncias percorridas às cegas por X e Y, nessa ordem, é igual a:

- a) $\frac{5}{4}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{4}{3}$
- d) $\frac{4}{1}$
- e) $\frac{3}{4}$

○ 25. (ENEM) A baixa procura por carne bovina e o aumento de oferta de animais para abate fizeram com que o preço da arroba do boi apresentasse queda para o consumidor. No ano de 2012, o preço da arroba do boi caiu de R\$ 100,00 para R\$ 93,00.

Disponível em: www.diariodemarilia.com.br. Acesso em: 14 ago. 2012

Com o mesmo valor destinado à aquisição de carne, em termos de perda ou ganho, o consumidor:

- a) ganhou 6,5% em poder aquisitivo de carne.
- b) ganhou 7% em poder aquisitivo de carne.
- c) ganhou 7,5% em poder aquisitivo de carne.
- d) perdeu 7% em poder aquisitivo de carne.
- e) perdeu 7,5% em poder aquisitivo de carne.



○ 26. (ENEM) O quadro representa os gastos mensais, em real, de uma família com internet, mensalidade escolar e mesada do filho.

Internet	Mensalidade escolar	Mesada do filho
120	700	400

No início do ano, a internet e a mensalidade escolar tiveram acréscimos, respectivamente, de 20% e 10%. Necessitando manter o valor da despesa mensal total com os itens citados, a família reduzirá a mesada do filho.

Qual será a porcentagem da redução da mesada?

- a) 15,0
- b) 23,5
- c) 30,0
- d) 70,0
- e) 76,5



○ 27. (ENEM) Em uma loja, o preço promocional de uma geladeira é de R\$ 1 000,00 para pagamento somente em dinheiro. Seu preço normal, fora da promoção, é 10% maior. Para pagamento feito com o cartão de crédito da loja, é dado um desconto de 2% sobre o preço normal.

Uma cliente decidiu comprar essa geladeira, optando pelo pagamento com o cartão de crédito da loja. Ela calculou que o valor a ser pago seria o preço promocional acrescido de 8%. Ao ser informada pela loja do valor a pagar, segundo sua opção, percebeu uma diferença entre seu cálculo e o valor que lhe foi apresentado.

O valor apresentado pela loja, comparado ao valor calculado pela cliente, foi:

- a) R\$ 2,00 menor.
- b) R\$ 100,00 menor.
- c) R\$ 200,00 menor.
- d) R\$ 42,00 maior.
- e) R\$ 80,00 maior.



○ **28. (ENEM)** O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), criado para medir a qualidade do aprendizado do ensino básico no Brasil, é calculado a cada dois anos. No seu cálculo são combinados dois indicadores: o aprendizado e o fluxo escolar, obtidos a partir do Censo Escolar e das avaliações oficiais promovidas pelo Inep.

O Ideb de uma escola numa dada série escolar pode ser calculado pela expressão

$$\text{Ideb} = N \times P,$$

em que N é a média da proficiência em língua portuguesa e matemática, obtida a partir do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), e variando de 0 a 10. O indicador P, que varia de 0 a 1, por sua vez, refere-se ao fluxo escolar, pois considera as taxas de aprovação e reprovação da instituição, sendo calculado por

$$P = \frac{1}{T},$$

em que T é o tempo médio de permanência dos alunos na série.

Disponível em: www.inep.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

Uma escola apresentou no 9º ano do ensino fundamental, em 2017, um Ideb diferente daquele que havia apresentado nessa mesma série em 2015, pois o tempo médio de permanência dos alunos no 9º ano diminuiu 2%, enquanto a média de proficiência em língua portuguesa e matemática, nessa série, aumentou em 2%.

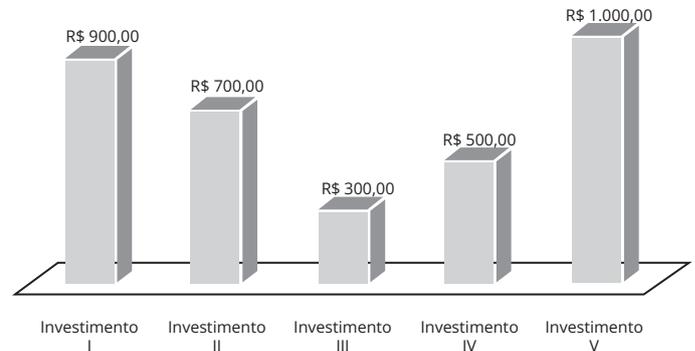
Dessa forma, o Ideb do 9º ano do ensino fundamental dessa escola em 2017, em relação ao calculado em 2015:

- permaneceu inalterado, pois o aumento e a diminuição de 2% nos dois parâmetros anulam-se.
- aumentou em 4%, pois o aumento de 2% na média da proficiência soma-se à diminuição de 2% no tempo médio de permanência dos alunos na série.
- diminuiu em 4,04%, pois tanto o decréscimo do tempo médio de permanência dos alunos na série em 2% quanto o crescimento da média da proficiência em 2% implicam dois decréscimos consecutivos de 2% no valor do ideb.
- aumentou em 4,04%, pois tanto o decréscimo do tempo médio de permanência dos alunos na série em 2% quanto o crescimento da média da proficiência em 2% implicam dois acréscimos consecutivos de 2% no valor do ideb.
- aumentou em 4,08%, pois houve um acréscimo de 2% num parâmetro que é diretamente proporcional e um decréscimo de 2% num parâmetro que é inversamente proporcional ao ideb.

Anotações:

○ **29. (ENEM)** Um investidor pretende aplicar R\$ 100.000,00 no mercado financeiro. Para isso pesquisou cinco investimentos distintos, aferindo os rendimentos mensais, em real, de cada um deles. Para decidir em qual aplicar seu dinheiro, considerou também a incidência mensal de Imposto de Renda (IR) sobre o respectivo rendimento. Avaliou que o maior retorno financeiro virá da aplicação em um único investimento: aquele em que a diferença entre o rendimento mensal e o imposto que incidir sobre ele seja a maior possível. Os dados levantados pelo investidor sobre rendimento e imposto referentes à aplicação encontram-se a seguir.

Rendimento de cada investimento por mês



Investimento	Incidência de IR sobre o rendimento (por mês)
I	12%
II	9%
III	20%
IV	10%
V	22%

O investidor decidiu fazer a aplicação no investimento:

- I.
- II.
- III.
- IV.
- V.



○ 30. (ENEM) A gerência de uma loja de eletrônicos organizou em um quadro os dados de venda (quantidade e preço unitário) de celulares, impressoras e notebooks de um ano.

Produto	Quantidade	Preço unitário (R\$)
Celular	300	300
Impressão	300	200
Notebook	200	900

Para o ano seguinte, deseja arrecadar 10% a mais do que foi arrecadado naquele ano anterior, vendendo as mesmas quantidades de cada um desses três produtos, mas reajustando apenas o preço do notebook.

O preço de venda a ser estabelecido para um notebook, para o ano seguinte, em real, deverá ser igual a:

- a) 975,00.
- b) 990,00.
- c) 1.040,00.
- d) 1.065,00.
- e) 1.540,00.

○ 31. (ENEM) Um atleta produz sua própria refeição com custo fixo de R\$ 10,00. Ela é composta por 400g de frango, 600g de batata-doce e uma hortaliça. Atualmente, os preços dos produtos para essa refeição são:

Refeição	Frango (kg)	Batata-doce (kg)	Hortaliças (unidade)
	R\$ 12,50	R\$ 5,00	R\$ 2,00

Em relação a esses preços, haverá um aumento de 50% no preço do quilograma de batata-doce, e os outros preços não serão alterados. O atleta deseja manter o custo da refeição, a quantidade de batata-doce e a hortaliça. Portanto, terá que reduzir a quantidade de frango.

Qual deve ser a redução percentual da quantidade de frango para que o atleta alcance seu objetivo?

- a) 12,5
- b) 28,0
- c) 30,0
- d) 50,0
- e) 70,0

○ 32. (ENEM) Um ciclista amador de 61 anos de idade utilizou um monitor cardíaco para medir suas frequências cardíacas em quatro diferentes tipos de trechos do percurso. Os resultados das frequências cardíacas máximas alcançadas nesses trechos foram:

Trechos de percurso	Frequências cardíacas máximas (bpm)
Leve no plano	90
Forte no plano	120
Subida moderada	130
Subida forte	140

Sabe-se que a faixa aeróbica ideal para o ganho de condicionamento físico é entre 65% e 85% da frequência cardíaca máxima (F_c máx), que, por sua vez, é determinada pela fórmula:

$$F_c \text{ máx.} = 220 - \text{idades,}$$

em que a idade é dada em ano e F_c máx. é dada em bpm (bati-mento por minuto).

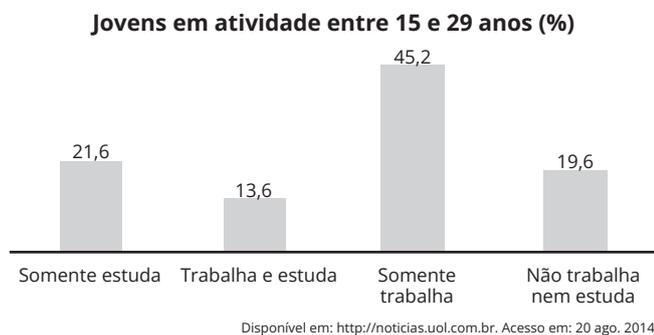
Os trechos do percurso nos quais esse ciclista se mantém dentro de sua faixa aeróbica ideal, para o ganho de condicionamento físico, são:

- a) leve no plano, forte no plano, subida moderada e subida forte.
- b) leve no plano, forte no plano e subida moderada.
- c) forte no plano, subida moderada e subida forte.
- d) forte no plano e subida moderada.
- e) leve no plano e subida forte.

Anotações:



○ **33. (ENEM)** A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad) é uma pesquisa feita anualmente pelo IBGE, exceto nos anos em que há Censo. Em um ano, foram entrevistados 363 mil jovens para fazer um levantamento sobre suas atividades profissionais e/ou acadêmicas. Os resultados da pesquisa estão indicados no gráfico.



De acordo com as informações dadas, o número de jovens entrevistados que trabalha é:

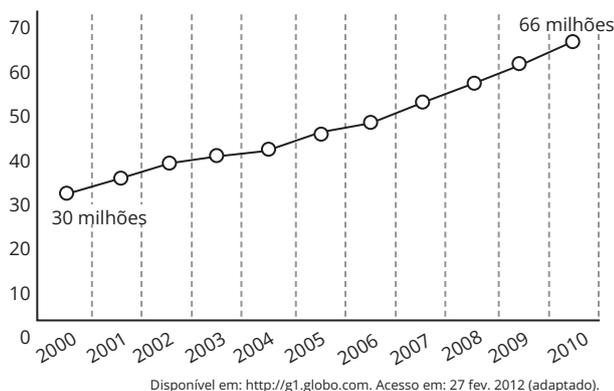
- a) 114.708.
- b) 164.076.
- c) 213.444.
- d) 284.592.
- e) 291.582.

○ **34. (ENEM)** Uma editora pretende fazer uma reimpressão de um de seus livros. A direção da editora sabe que o gasto com papel representa 60% do custo de reimpressão, e que as despesas com a gráfica representam os 40% restantes. Dentro da programação da editora, no momento em que ela realizar a reimpressão, o preço do papel e os custos com a gráfica terão sofrido reajustes de 25,9% e 32,5%, respectivamente. O custo para a reimpressão de cada livro, nos preços atuais, é de R\$ 100,00.

Qual será o custo, em real, para a reimpressão de cada livro com os reajustes estimados de custo de papel e despesas com a gráfica?

- a) 128,54
- b) 129,20
- c) 129,86
- d) 158,40
- e) 166,82

○ **35. (ENEM)** Nos últimos anos, a frota de veículos no Brasil tem crescido de forma acentuada. Observando o gráfico, é possível verificar a variação do número de veículos (carros, motocicletas e caminhões), no período de 2000 a 2010. Projeta-se que a taxa de crescimento relativo no período de 2000 a 2010 mantenha-se para a década seguinte.



Qual será o número de veículos no ano de 2020??

- a) 79,2 milhões
- b) 102,0 milhões
- c) 132,0 milhões
- d) 138,0 milhões
- e) 145,2 milhões

○ **36. (ENEM)** A cada bimestre, a diretora de uma escola compra uma quantidade de folhas de papel ofício proporcional ao número de alunos matriculados. No bimestre passado, ela comprou 6 000 folhas para serem utilizadas pelos 1 200 alunos matriculados. Neste bimestre, alguns alunos cancelaram suas matrículas e a escola tem, agora, 1 150 alunos. A diretora só pode gastar R\$ 220,00 nessa compra, e sabe que o fornecedor da escola vende as folhas de papel ofício em embalagens de 100 unidades a R\$ 4,00 a embalagem. Assim, será preciso convencer o fornecedor a dar um desconto à escola, de modo que seja possível comprar a quantidade total de papel ofício necessária para o bimestre.

O desconto necessário no preço final da compra, em porcentagem, pertence ao intervalos:

- a) (5,0 ; 5,5)
- b) (8,0 ; 8,5)
- c) (11,5 ; 12,5)
- d) (19,5 ; 20,5)
- e) (3,5 ; 4,0)

○ **37. (ENEM)** Em janeiro do ano passado, a direção de uma fábrica abriu uma creche para os filhos de seus funcionários, com 10 salas, cada uma com capacidade para atender 10 crianças a cada ano. As vagas são sorteadas entre os filhos dos funcionários inscritos, enquanto os não contemplados pelo sorteio formam uma lista de espera. No ano passado, a lista de espera teve 400 nomes e, neste ano, esse número cresceu 10%.

A direção da fábrica realizou uma pesquisa e constatou que a lista de espera para o próximo ano terá a mesma quantidade de nomes da lista de espera deste ano. Decidiu, então, construir, ao longo desse ano, novas salas para a creche, também com capacidade de atendimento para 10 crianças cada, de modo que o número de nomes na lista de espera no próximo ano seja 25% menor que o deste ano.

O número mínimo de salas que deverão ser construídas é

- a) 10
- b) 11
- c) 13
- d) 30
- e) 33



○ **38. (ENEM)** Um pescador tem um custo fixo diário de R\$ 900,00 com combustível, iscas, manutenção de seu barco e outras pequenas despesas. Ele vende cada quilograma de peixe por R\$ 5,00. Sua meta é obter um lucro mínimo de R\$ 800,00 por dia. Sozinho, ele consegue, ao final de um dia de trabalho, pescar 180 kg de peixe, o que é suficiente apenas para cobrir o custo fixo diário. Portanto, precisa contratar ajudantes, pagando para cada um R\$ 250,00 por dia de trabalho. Além desse valor, 4% da receita obtida pela venda de peixe é repartida igualmente entre os ajudantes. Considerando o tamanho de seu barco, ele pode contratar até 5 ajudantes. Ele sabe que com um ajudante a pesca diária é de 300 kg e que, a partir do segundo ajudante contratado, aumenta-se em 100 kg a quantidade de peixe pescada por ajudante em um dia de trabalho.

A quantidade mínima de ajudantes que esse pescador precisa contratar para conseguir o lucro diário pretendido é

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

○ **39. (ENEM)** Para realizar um voo entre duas cidades que distam 2.000 km uma da outra, uma companhia aérea utilizava um modelo de aeronave A, capaz de transportar até 200 passageiros. Quando uma dessas aeronaves está lotada de passageiros, o consumo de combustível é de 0,02 litro por quilômetro e por passageiro. Essa companhia resolveu trocar o modelo de aeronave A pelo modelo de aeronave B, que é capaz de transportar 10% de passageiros a mais do que o modelo A, mas consumindo 10% menos combustível por quilômetro e por passageiro. A quantidade de combustível consumida pelo modelo de aeronave B, em relação à do modelo de aeronave A, em um voo lotado entre as duas cidades, é

- a) 10% menor
- b) 1% menor
- c) igual
- d) 1% maior
- e) 11% maior

○ **40. (ENEM)** Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas. Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses. Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser

- a) 72%
- b) 68%
- c) 64%
- d) 54%
- e) 18%

○ **41. (ENEM)** O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% deles eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%. Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

- a) 10
- b) 15
- c) 35
- d) 40
- e) 45

○ **42. (ENEM)** Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90% dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem P da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película. De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de P é

- a) [35;63]
- b) [40;63]
- c) [50;70]
- d) [50;90]
- e) [70;90]

○ **43. (ENEM)** Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R\$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R\$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía. Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento. Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

- a) R\$ 0,96
- b) R\$ 1,00
- c) R\$ 1,40
- d) R\$ 1,50
- e) R\$ 1,56



○ **44. (ENEM)** Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana. A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.

Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe			
Grupo de risco	População (milhão)	População já vacinada	
		(milhão)	%
Crianças	4,5	0,9	20
Profissionais de saúde	2,0	1,0	50
Gestantes	2,5	1,5	60
Indígenas	0,5	0,4	80
Idosos	20,5	8,2	40

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

- a) 12
- b) 18
- c) 30
- d) 40
- e) 50

○ **45. (ENEM)** Uma pessoa, que perdeu um objeto pessoal quando visitou uma cidade, pretende divulgar nos meios de comunicação informações a respeito da perda desse objeto e de seu contato para eventual devolução. No entanto, ela lembra que, de acordo com o Art. 1.234 do Código Civil, poderá ter que pagar pelas despesas do transporte desse objeto até sua cidade e poderá ter que recompensar a pessoa que lhe restituir o objeto em, pelo menos, 5% do valor do objeto. Ela sabe que o custo com transporte será de um quinto do valor atual do objeto e, como ela tem muito interesse em reavê-lo, pretende ofertar o maior percentual possível de recompensa, desde que o gasto total com as despesas não ultrapasse o valor atual do objeto. Nessas condições, o percentual sobre o valor do objeto, dado como recompensa, que ela deverá ofertar é igual a

- a) 20%
- b) 25%
- c) 40%
- d) 60%
- e) 80%

Anotações:

○ **46. (ENEM)** Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R\$ 1.250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. Censo 2010. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de

- a) R\$ 1.340,00
- b) R\$ 1.349,00
- c) R\$ 1.375,00
- d) R\$ 1.465,00
- e) R\$ 1.474,00

○ **47. (ENEM)** O rótulo da embalagem de um cosmético informa que a dissolução de seu conteúdo, de acordo com suas especificações, rende 2,7 litros desse produto pronto para o uso. Uma pessoa será submetida a um tratamento estético em que deverá tomar um banho de imersão com esse produto numa banheira com capacidade de $0,3\text{m}^3$. Para evitar o transbordamento, essa banheira será preenchida em 80% de sua capacidade. Para esse banho, o número mínimo de embalagens desse cosmético é

- a) 9
- b) 12
- c) 89
- d) 122
- e) 134

○ **48. (ENEM)** Após consulta médica, um paciente deve seguir um tratamento composto por três medicamentos: X, Y e Z. O paciente, para adquirir os três medicamentos, faz um orçamento em três farmácias diferentes, conforme o quadro.

	X	Y	Z
Farmácia 1	R\$ 45,00	R\$ 40,00	R\$ 50,00
Farmácia 2	R\$ 50,00	R\$ 50,00	R\$ 40,00
Farmácia 3	R\$ 65,00	R\$ 45,00	R\$ 35,00

Dessas farmácias, algumas oferecem descontos:

- na compra dos medicamentos X e Y na Farmácia 2, recebe-se um desconto de 20% em ambos os produtos, independentemente da compra do medicamento Z, e não há desconto para o medicamento Z;

- na compra dos 3 medicamentos na Farmácia 3, recebe-se 20% de desconto no valor total da compra.

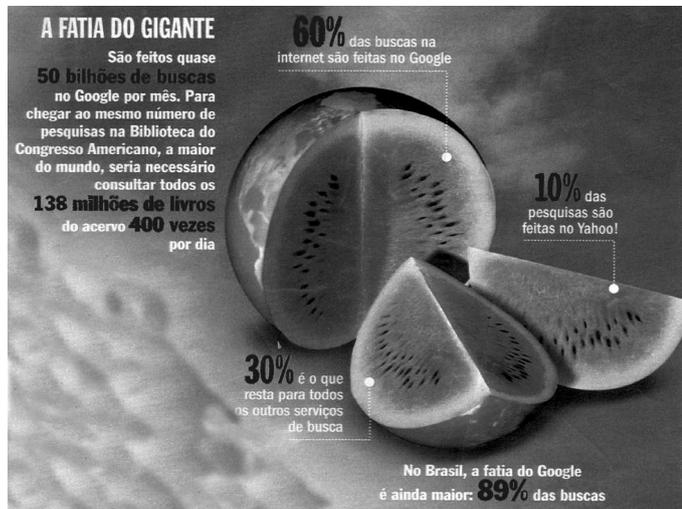
O paciente deseja efetuar a compra de modo a minimizar sua despesa com os medicamentos. De acordo com as informações fornecidas, o paciente deve comprar os medicamentos da seguinte forma:

- a) X, Y e Z na Farmácia 1
- b) X e Y na Farmácia 1 e Z na Farmácia 3
- c) X e Y na Farmácia 2 e Z na Farmácia 3
- d) X na Farmácia 2, Y e Z na Farmácia 3
- e) X, Y e Z na Farmácia 3



○ 49. (UFSM) A internet tem-se tornado mundialmente um instrumento eficaz de informação do homem moderno. Utilizando a internet, pode-se conhecer a cultura de um povo, olhar museus, fazer pesquisas sobre artes, ciências, política, etc.

A figura a seguir, publicada na revista *Veja* em 17/12/2008, mostra como são feitas as buscas na internet.



De acordo com os dados da figura, o número total de buscas na internet, feitas mensalmente, é, em bilhões, aproximadamente igual a

- a) 50.
- b) 60,50.
- c) 83,33.
- d) 100.
- e) 100,66.

○ 50. (UFSM) Uma televisão custava R\$ 1.000,00 em janeiro. No início de fevereiro, seu preço aumentou em 10%. No início de março, durante uma liquidação, ela foi vendida com 10% de desconto. Em relação ao preço de janeiro, no valor da venda,

- a) houve lucro de R\$ 10,00.
- b) houve lucro de R\$ 8,00.
- c) não houve lucro, nem prejuízo.
- d) houve prejuízo de R\$ 8,00.
- e) houve prejuízo de R\$ 10,00.

○ 51. (UFSM) Em certa eleição municipal, numa pequena cidade do interior, foram divulgados os seguintes resultados:

Candidato	Porcentagem do total de votos	Número de votos
José	37%	
João	28%	
Joaquim	23%	
Nulos ou em branco		1.680

Com esses dados, você pode afirmar que a diferença de votos entre José e João é igual a

- a) 1.280
- b) 1.260
- c) 1.250
- d) 1.240
- e) 1.230

Para responder às questões de números 52 e 53, leia o texto a seguir.

Hipátia de Alexandria, nascida em 370 d.c., é a primeira matemática reconhecida pela história e, dentre suas principais contribuições, está a criação do hidrômetro, embora o hidrômetro moderno só tenha sido desenvolvido no século XIX. A sua utilização permitiu o uso mais consciente da água, pois cada família vai pagar exatamente pelo que consumiu.

Atualmente, o valor da conta de água é composto pela soma de duas tarifas: de água e de coleta de esgoto. O valor da coleta de esgoto corresponde a 80% do valor consumido de água. Já o valor do consumo de água é estabelecido progressivamente, de acordo com a tabela a seguir.

Faixa de consumo (m³)	Tarifa básica (R\$)	Valor por m³ (R\$)
0 a 10	24,80	-
10 a 20	24,80	3,10
20 a 30	55,80	4,00
30 a 50	95,80	5,40
50 a 100	203,80	7,50

○ 52. (UFSM) Para cada faixa de consumo, o valor referente ao consumo de água é dado pela tarifa básica, acrescido do valor referente à quantidade gasta acima do mínimo, multiplicado pelo valor do metro cúbico correspondente.

Supondo que, em janeiro de 2023, uma família consumiu 40 m de água, qual será o valor total da 3ª conta do mês, considerando também a tarifa de coleta de esgoto?

- a) R\$ 119,84
- b) R\$ 135,80
- c) R\$ 149,80
- d) R\$ 244,44
- e) R\$ 269,64

○ 53. (UFSM) Quando o consumidor atrasa o pagamento, a companhia de água cobra juros para compensar o atraso. Esses juros são calculados da seguinte forma: multa de 2% sobre o valor total da conta, acrescido de juros simples de 1% ao mês, calculados proporcionalmente aos dias em atraso, não podendo incidir sobre o valor da multa.

Se a mesma família da questão anterior atrasou o pagamento da conta de água de janeiro de 2023 em um mês, qual foi o valor pago?

- a) R\$ 123,44
- b) R\$ 154,29
- c) R\$ 154,32
- d) R\$ 277,73
- e) R\$ 277,78



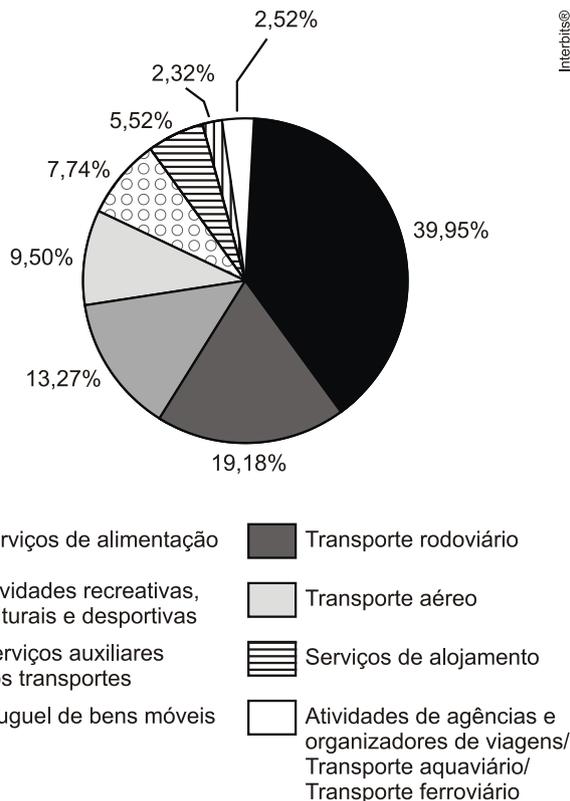
○ **54. (UFSM)** O A safra nacional de grãos atingirá 192,3 milhões de toneladas neste ano, um crescimento de 2,2% em relação a 2013, quando foi de, aproximadamente, 188,1 milhões de toneladas. As estimativas são do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e foram divulgadas na terça-feira, 10 de julho. O destaque na produção será a região Centro-Oeste responsável por 42% da produção nacional, seguida pela região Sul com 38% do total.

Disponível em: <<http://www.agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2014-06/ibge-safra-sera-22-maior-que-em-2013-indo-192-milhoes-de-toneladas>>. Acesso em: 10 set. 2014. (adaptado)

Qual será, aproximadamente, a quantidade, em milhões de toneladas, da produção da região Centro-Oeste em 2014?

- a) 153,84
- b) 150,48
- c) 80,80
- d) 79,00
- e) 73,10

○ **55. (UFSM)** O gráfico a seguir mostra a distribuição percentual do valor da produção gerada pelas Atividades Características do Turismo no Brasil por atividade, em 2007



Fonte: Disponível em <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em: 15 jun, 2012. (adaptado)

Sabe-se que, em 2007, as Atividades Características do Turismo geraram uma produção de 168,8 bilhões de reais. Qual é, aproximadamente, em bilhões de reais, a produção gerada pelas Atividades recreativas, culturais e desportivas?

- a) 13,1
- b) 16,0
- c) 22,4
- d) 33,4
- e) 67,4

○ **56. (UFSM)** O Considerando, ainda, as cópias da Venus de Milo, sabe-se que a empresa produtora dessas cópias recolhe, em imposto e royalties, 25% sobre o valor de cada cópia comercializada. Uma cópia da Vênus de Milo tem custo de produção de R\$ 360,00 e é comercializada por R\$ 600,00. Qual é o percentual do lucro referente ao valor de comercialização dessa cópia?

- a) 50%
- b) 33%
- c) 25%
- d) 15%
- e) 12,5%

Anotações:



HABILIDADES À PROVA 6

» Estatística

○ 1. (ENEM) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências ao longo dos meses e dos anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, da mediana e da moda são, respectivamente, iguais a:

- a) 17°C - 17°C - 13,5°C
- b) 17°C - 18°C - 13,5°C
- c) 17°C - 13,5°C - 18°C
- d) 17°C - 18°C - 21,5°C
- e) 17°C - 13,5°C - 21,5°C

○ 2. (ENEM) Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, em uma olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é:

- a) 20,70
- b) 20,77
- c) 20,80
- d) 20,85
- e) 20,90

○ 3. (ENEM 2022) Nos cinco jogos finais da última temporada, com uma média de 18 pontos por jogo, um jogador foi eleito o melhor do campeonato de basquete. Na atual temporada, cinco jogadores têm a chance de igualar ou melhorar essa média. No quadro estão registradas as pontuações desses cinco jogadores nos quatro primeiros jogos das finais deste ano.

Jogadores	Jogo 1	Jogo 2	Jogo 3	Jogo 4
I	12	25	20	20
II	12	12	27	20
III	14	14	17	26
IV	15	18	21	21
V	22	15	23	15

O quinto e último jogo será realizado para decidir a equipe campeã e qual o melhor jogador da temporada.

O jogador que precisa fazer a menor quantidade de pontos no quinto jogo, para igualar a média de pontos do melhor jogador da temporada passada, é o:

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.

○ 4. (ENEM) Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

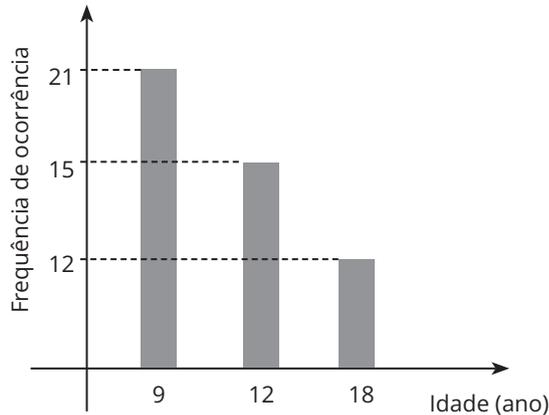
Mês	Cotação	Ano
Outubro	R\$ 83,00	2007
Novembro	R\$ 73,10	2007
Dezembro	R\$ 81,60	2007
Janeiro	R\$ 82,00	2008
Fevereiro	R\$ 85,30	2008
Março	R\$ 84,00	2008
Abril	R\$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a:

- a) R\$ 73,10
- b) R\$ 81,50
- c) R\$ 82,00
- d) R\$ 83,00
- e) R\$ 85,30



○ 5. (ENEM) Uma pessoa, ao fazer uma pesquisa com alguns alunos de um curso, coletou as idades dos entrevistados e organizou esses dados em um gráfico.



Qual a moda das idades, em anos, dos entrevistados?

- a) 9
- b) 12
- c) 13
- d) 15
- e) 21

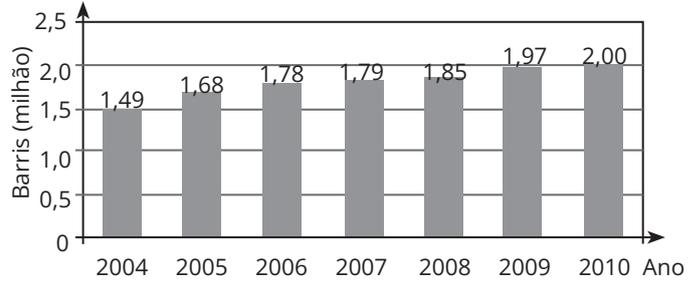
○ 6. (ENEM) Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

○ 7. (ENEM) O gráfico mostra a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, no período de 2004 a 2010.



Estimativas feitas naquela época indicavam que a média de produção diária de petróleo no Brasil, em 2012, seria 10% superior à média dos três últimos anos apresentados no gráfico.

Disponível em: <http://blogs.estadao.com.br>. Acesso em: 2 ago. 2012.

Estimativas feitas naquela época indicavam que a produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, em 2012, teria sido igual a:

- a) 1,940.
- b) 2,134.
- c) 2,167.
- d) 2,420.
- e) 6,402.

○ 8. (ENEM) Uma pessoa está disputando um processo de seleção para uma vaga de emprego em um escritório. Em uma das etapas desse processo, ela tem de digitar oito textos. A quantidade de erros dessa pessoa, em cada um dos textos digitados, é dada na tabela.

Texto	Número de erros
I	2
II	0
III	2
IV	2
V	6
VI	3
VII	4
VIII	5

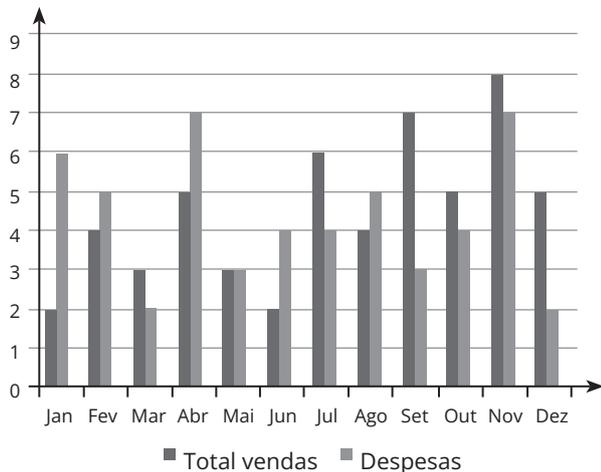
Nessa etapa do processo de seleção, os candidatos serão avaliados pelo valor da mediana do número de erros.

A mediana dos números de erros cometidos por essa pessoa é igual a:

- a) 2,0
- b) 2,5
- c) 3,0
- d) 3,5
- e) 4,0



○ 19. (ENEM) Uma empresa registrou seu desempenho em determinado ano por meio do gráfico, com dados mensais do total de vendas e despesas.



O lucro mensal é obtido pela subtração entre o total de vendas e despesas, nessa ordem.

Quais os três meses do ano em que foram registrados os maiores lucros?

- a) Julho, setembro e dezembro.
- b) Julho, setembro e novembro.
- c) Abril, setembro e novembro.
- d) Janeiro, setembro e dezembro.
- e) Janeiro, abril e junho.

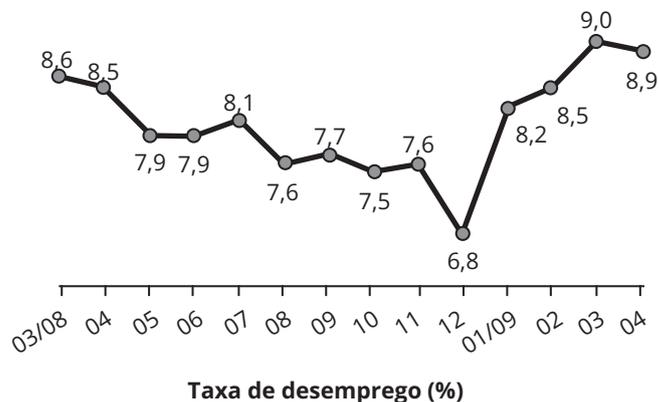
○ 10. (ENEM) Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova	4ª Prova	5ª Prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(re) reprovado(s):

- a) apenas o aluno Y.
- b) apenas o aluno Z.
- c) apenas os alunos X e Y.
- d) apenas os alunos X e Z.
- e) os alunos X, Y e Z.

○ 11. (ENEM) O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

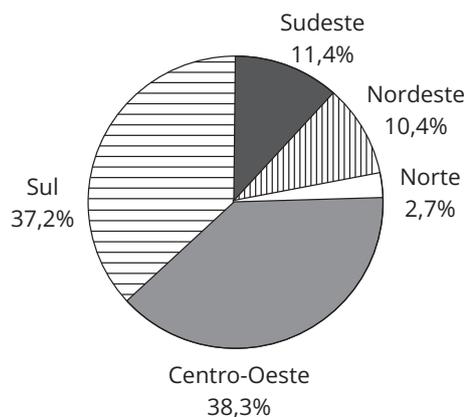


IBGE. Pesquisa mensal de emprego. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 30 jul. 2012 (adaptado).

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de:

- a) 8,1%
- b) 8,0%
- c) 7,9%
- d) 7,7%
- e) 7,6%

○ 12. (ENEM) Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma par-



ticipação por região conforme indicado no gráfico.

As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012.

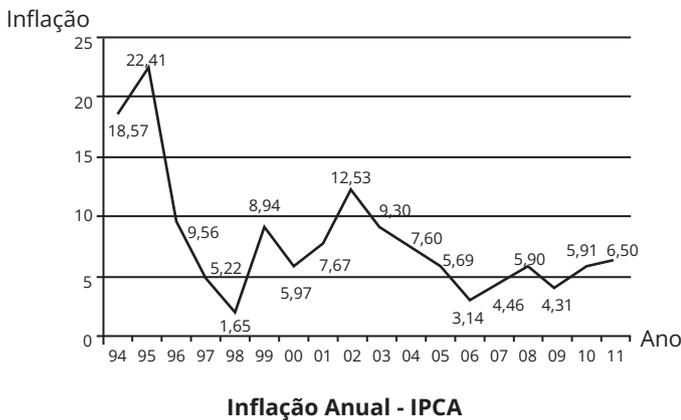
Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 3 jul. 2012

De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país?

- a) 10,3
- b) 11,4
- c) 13,6
- d) 16,5
- e) 18,1



○ 13. (ENEM) Um dos principais indicadores de inflação é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O gráfico apresenta os valores do IPCA nos anos de 1994 a 2011.



Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor mais próximo da mediana de todos os valores da inflação indicados no gráfico é:

- a) 5,97
- b) 6,24
- c) 6,50
- d) 8,07
- e) 10,10

○ 14. (ENEM) Dois amigos abriram um restaurante. No primeiro ano, o custo total com as despesas do restaurante chegou a 250 mil reais. A receita neste ano foi de 325 mil reais, obtendo assim um lucro de 75 mil reais (diferença entre a receita e o custo total). A tabela representa o custo total e a receita nos cinco primeiros anos.

Ano	Custo total (milhar de real)	Receita (milhar de real)
Primeiro	250	325
Segundo	270	355
Terceiro	290	350
Quarto	280	365
Quinto	260	305

De acordo com a tabela, a média anual do lucro, em milhar de real, ao longo dos cinco anos, é:

- a) 60
- b) 70
- c) 75
- d) 80
- e) 85

○ 15. (ENEM) No quadro, estão representadas as quantidades de certos tipos de vinho vendidos durante o ano e o lucro por unidade vendida de cada um desses tipos. Para repor seu estoque, o proprietário escolherá apenas os tipos de vinho em que o lucro total com sua venda foi maior do que a média entre os lucros obtidos com a venda de todos os tipos.

Tipo de vinho	I	II	III	IV	V	VI
Unidades vendidas	120	50	71	47	70	90
Lucro por unidade (R\$)	6,00	12,00	10,00	20,00	5,00	12,00

Conforme condições estabelecidas, os tipos de vinhos escolhidos serão:

- a) I e VI.
- b) IV e VI.
- c) I, IV e VI.
- d) II, IV e VI.
- e) II, III, IV e VI.

○ 16. (ENEM 2022) Uma das informações que pode auxiliar no dimensionamento do número de pediatras que devem atender em uma Unidade Básica de Saúde (UBS) é o número que representa a mediana da quantidade de crianças por família existente na região sob sua responsabilidade. O quadro mostra a distribuição das frequências do número de crianças por família na região de responsabilidade de uma UBS.

Número de crianças por família	Frequência
0	100
1	400
2	200
3	150
4	100
5	50

O número que representa a mediana da quantidade de crianças por família nessa região é:

- a) 1,0.
- b) 1,5.
- c) 1,9.
- d) 2,1.
- e) 2,5.



○ 17. (ENEM) Cinco equipes, A, B, C, D e E, disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi 2 pontos.

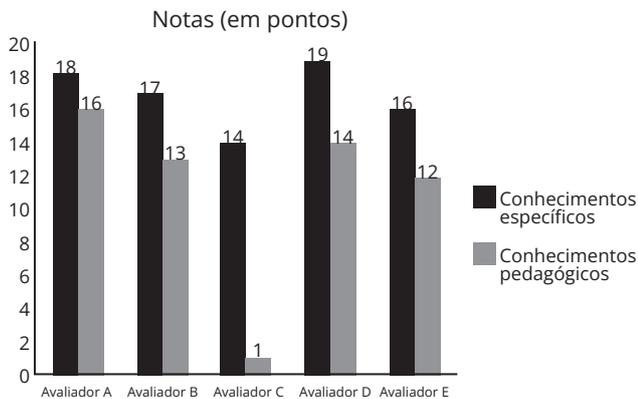
As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto se esqueceram de representar as notas da equipe D e da equipe E.



Mesmo sem aparecer as notas das equipes D e E, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente:

- a) 1,5 e 2,0.
- b) 2,0 e 1,5.
- c) 2,0 e 2,0.
- d) 2,0 e 3,0.
- e) 3,0 e 2,0.

○ 18. (ENEM) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação, e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.

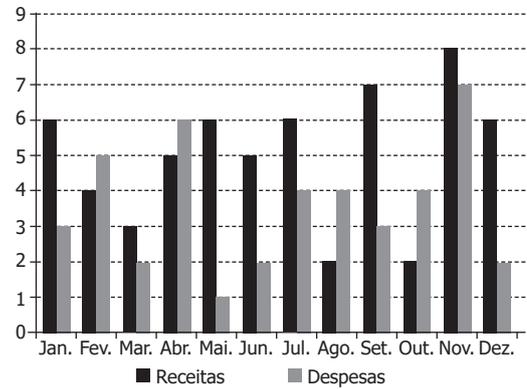


Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é:

- a) 0,25 ponto maior.
- b) 1,00 ponto maior.
- c) 1,00 ponto menor.
- d) 1,25 ponto maior.
- e) 2,00 pontos menor.

○ 19. (ENEM 2022) O gráfico apresenta os totais de receitas e despesas de uma empresa, expressos em milhão de reais, no decorrer dos meses de um determinado ano. A empresa obtém lucro quando a diferença entre receita e despesa é positiva e tem prejuízo quando essa diferença é negativa.



Qual é a mediana, em milhão de reais, dos valores dos lucros apurados pela empresa nesse ano?

- a) 1,5
- b) 2,0
- c) 2,9
- d) 3,0
- e) 5,5

○ 20. (ENEM) Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é:

- a) 18
- b) 19
- c) 22
- d) 25
- e) 26



○ **21. (ENEM)** Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0, e a cor preta, pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor:

- a) branca e os de número 38.
- b) branca e os de número 37.
- c) branca e os de número 36.
- d) preta e os de número 38.
- e) preta e os de número 37.

○ **22. (ENEM)** Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe:

- a) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
- b) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
- c) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
- d) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
- e) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

○ **23. (ENEM 2022)** Em uma universidade, atuam professores que estão enquadrados funcionalmente pela sua maior titulação: mestre ou doutor. Nela há, atualmente, 60 mestres e 40 doutores. Os salários mensais dos professores mestres e dos

doutores são, respectivamente, R\$ 8 000,00 e R\$ 12 000,00.

A diretoria da instituição pretende proporcionar um aumento salarial diferenciado para o ano seguinte, de tal forma que o salário médio mensal dos professores dessa instituição não ultrapasse R\$ 12 240,00. A universidade já estabeleceu que o aumento salarial será de 25% para os mestres e precisa ainda definir o percentual de reajuste para os doutores.

Mantido o número atual de professores com suas atuais titulações, o aumento salarial, em porcentagem, a ser concedido aos doutores deverá ser de, no máximo:

- a) 14,4.
- b) 20,7.
- c) 22,0.
- d) 30,0.
- e) 37,5.

○ **24. (ENEM)** A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que, se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente", conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é:

- a) 7,00
- b) 7,38
- c) 7,50
- d) 8,25
- e) 9,00



○ 25. (ENEM) A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro.

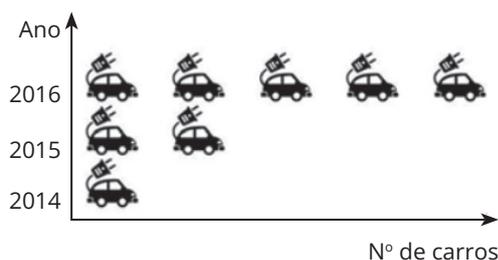
Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é:

- a) 0,15
- b) 0,30
- c) 0,50
- d) 1,11
- e) 2,22

○ 26. (ENEM) De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.



Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 5 dez. 2017.

A média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico, foi de:

- a) 192
- b) 240
- c) 252
- d) 320
- e) 420

○ 27. (ENEM) Em uma fábrica de refrigerantes, é necessário que se faça periodicamente o controle no processo de engarrafamento para evitar que sejam envasadas garrafas fora da especificação do volume escrito no rótulo.

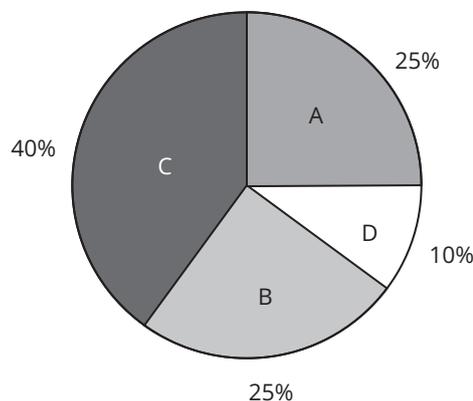
Diariamente, durante 60 dias, foram anotadas as quantidades de garrafas fora dessas especificações. O resultado está apresentado no quadro.

Quantidade de garrafas fora das especificações por dia	Quantidade de dias
0	52
1	5
2	2
3	1

A média diária de garrafas fora das especificações no período considerado é:

- a) 0,1.
- b) 0,2.
- c) 1,5.
- d) 2,0.
- e) 3,0.

○ 28. (ENEM) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R\$ 200,00; B = R\$ 300,00; C = R\$ 400,00 e D = R\$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é:

- a) 300,00
- b) 345,00
- c) 350,00
- d) 375,00
- e) 400,00



○ **29. (ENEM)** Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é:

- a) A - B - C - E - D
- b) B - A - C - E - D
- c) C - B - E - A - D
- d) C - B - E - D - A
- e) E - C - D - B - A

○ **30. (ENEM)** Um vendedor de assinaturas de TV a cabo teve, nos 7 primeiros meses do ano, uma média mensal de 84 assinaturas vendidas. Devido a uma reestruturação da empresa, foi exigido que todos os vendedores tivessem, ao final do ano, uma média mensal de 99 assinaturas vendidas. Diante disso, o vendedor viu-se forçado a aumentar sua média mensal de vendas nos 5 meses restantes do ano.

Qual deverá ser a média mensal de vendas do vendedor, nos próximos 5 meses, para que ele possa cumprir a exigência da sua empresa?

- a) 91
- b) 105
- c) 114
- d) 118
- e) 120

○ **31. (ENEM)** Numa turma de inclusão de jovens e adultos na educação formal profissional (Proeja), a média aritmética das idades dos seus dez alunos é de 32 anos. Em determinado dia, o aluno mais velho da turma faltou e, com isso, a média aritmética das idades dos nove alunos presentes foi de 30 anos.

Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 10 mar. 2012 (adaptado).

Qual é a idade do aluno que faltou naquela turma?

- a) 18
- b) 20
- c) 31
- d) 50
- e) 62



○ **32. (ENEM)** O preparador físico de um time de basquete dispõe de um plantel de 20 jogadores, com média de altura igual a 1,80 m. No último treino antes da estreia em um campeonato, um dos jogadores desfalcou o time em razão de uma séria contusão, forçando o técnico a contratar outro jogador para recompor o grupo.

Se o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior, qual é a média de altura, em metro, do novo grupo?

- a) 1,60
- b) 1,78
- c) 1,79
- d) 1,81
- e) 1,82

○ **33. (ENEM)** Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais à de nenhum outro colega da sala.

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

- a) basquete, basquete, basquete, basquete.
- b) futebol, basquete, basquete, basquete.
- c) futebol, futebol, basquete, basquete.
- d) futebol, futebol, futebol, basquete.
- e) futebol, futebol, futebol, futebol.



○ 34. (ENEM) Um posto de saúde registrou a quantidade de vacinas aplicadas contra febre amarela nos últimos cinco meses:

- 1º mês: 21;
- 2º mês: 22;
- 3º mês: 25;
- 4º mês: 31;
- 5º mês: 21.

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas, no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses.

Para atender essas condições, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é:

- a) 156
- b) 180
- c) 192
- d) 264
- e) 288

○ 35. (ENEM) O técnico de um time de basquete pretende aumentar a estatura média de sua equipe de 1,93 m para, no mínimo, 1,99 m. Para tanto, dentre os 15 jogadores que fazem parte de sua equipe, irá substituir os quatro mais baixos, de estaturas: 1,78 m, 1,82 m, 1,84 m e 1,86 m. Para isso, o técnico contratou um novo jogador de 2,02 m.

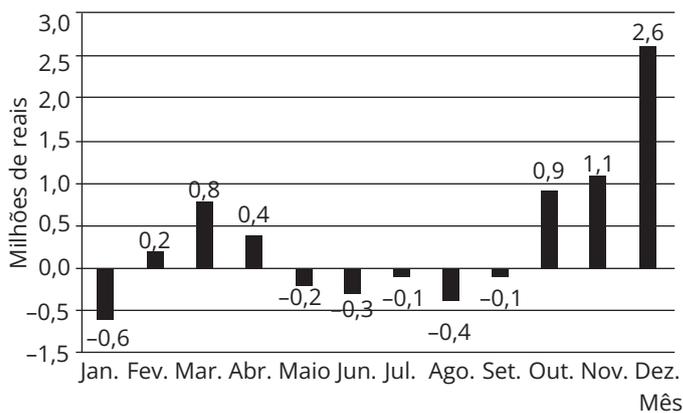
Os outros três jogadores que ele ainda precisa contratar devem satisfazer à sua necessidade de aumentar a média das estaturas da equipe. Ele fixará a média das estaturas para os três jogadores que ainda precisa contratar dentro do critério inicialmente estabelecido.

Qual deverá ser a média mínima das estaturas, em metro, que ele deverá fixar para o grupo de três novos jogadores que ainda irá contratar?

- a) 1,96
- b) 1,98
- c) 2,05
- d) 2,06
- e) 2,08



○ 36. (ENEM) O gráfico mostra o resultado do balanço financeiro mensal de uma empresa ao longo de um ano.



Em quantos meses o resultado do balanço financeiro da empresa ficou abaixo da média mensal nesse ano?

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10

○ 37. (ENEM) O quadro mostra o número de gols feitos pela equipe A em campeonatos estaduais de futebol, no período de 2007 a 2012.

Ano	Número de gols
2007	64
2008	59
2009	61
2010	45
2011	61
2012	58

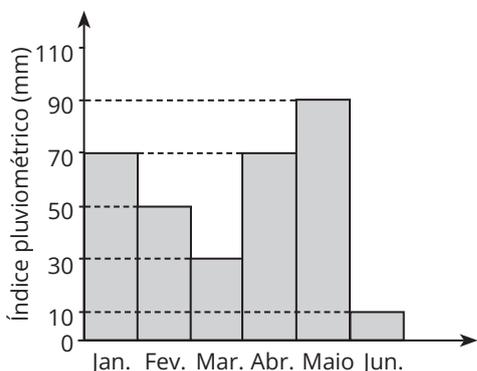
Faltando ainda alguns jogos para o término do campeonato estadual de 2013, o número de gols marcados pela equipe B era 52. O técnico dessa equipe fez um levantamento para saber quantos gols sua equipe deveria marcar nos próximos jogos de modo que, ao final do campeonato, o número total de gols marcados pela equipe B ultrapasse a média de gols marcados pela equipe A nos campeonatos de 2007 a 2012.

Quantos gols, no mínimo, a equipe B ainda precisaria marcar?

- a) 2
- b) 6
- c) 7
- d) 9
- e) 10



○ 38. (ENEM) O índice pluviométrico é uma medida, em milímetro, que fornece a quantidade de precipitação de chuva num determinado local e num intervalo de tempo (hora, dia, mês e/ou ano). Os valores mensais do índice pluviométrico de uma ci-



dade brasileira, no primeiro semestre, são mostrados no gráfico.

De acordo com a previsão meteorológica, o índice pluviométrico no mês de julho será igual ao índice do mês de junho somado à variação correspondente ao maior acréscimo, em milímetro, do índice pluviométrico entre dois meses consecutivos do semestre apresentado.

O índice pluviométrico, em milímetro, previsto para o mês de julho, na cidade considerada, será igual a:

- a) 30.
- b) 50.
- c) 70.
- d) 80.
- e) 90.

○ 39. (ENEM) Um síndico precisa pintar os muros, portões e calçamento de um edifício. Os pintores solicitaram três galões de tinta T1 para os muros, um galão de tinta T2 para os portões e dois galões de tinta T3 para o calçamento. Ele pesquisou o preço das tintas em cinco lojas diferentes, obtendo os seguintes valores, em real.

Loja	T1	T2	T3
1	82,00	134,00	202,00
2	80,00	122,00	214,00
3	85,00	115,00	209,00
4	88,00	132,00	199,00
5	90,00	116,00	202,00

O síndico irá comprar as tintas numa única loja, escolhendo aquela em que o valor total da compra resulte no menor preço médio por galão.

Com base nessas informações, a loja escolhida será:

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

○ 40. (ENEM) O gerente de uma concessionária apresentou a seguinte tabela em uma reunião de dirigentes. Sabe-se que ao final da reunião, a fim de elaborar metas e planos para o próximo ano, o administrador avaliará as vendas, com base na mediana do número de automóveis vendidos no período de janeiro a dezembro.

Mês	Número de automóveis vendidos
Janeiro	25
Fevereiro	20
Março	30
Abril	35
Maio	40
Junho	50
Julho	45
Agosto	35
Setembro	60
Outubro	55
Novembro	70
Dezembro	65

Qual foi a mediana dos dados apresentados?

- a) 40,0
- b) 42,5
- c) 45,0
- d) 47,5
- e) 50,0

○ 41. (ENEM) Uma grande rede de supermercados adota um sistema de avaliação dos faturamentos de suas filiais, considerando a média de faturamento mensal em milhão. A matriz da rede paga uma comissão para os representantes dos supermercados que atingirem uma média de faturamento mensal (M), conforme apresentado no quadro.

Comissão	Média de faturamento mensal (M)
I	$1 \leq M < 2$
II	$2 \leq M < 4$
III	$4 \leq M < 5$
IV	$5 \leq M < 6$
V	$M \geq 6$

Um supermercado da rede obteve os faturamentos num dado ano, conforme apresentado no quadro.

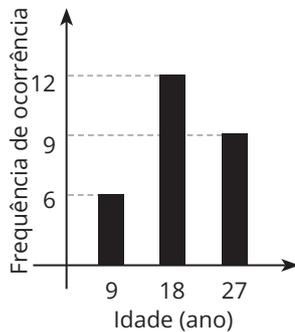
Faturamento mensal (em milhão de real)	Quantidade de meses
3,5	3
2,5	2
5	2
3	4
7,5	1



Nas condições apresentadas, os representantes desse supermercado avaliam que receberão, no ano seguinte, a comissão de tipo:

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.

○ 42. (ENEM) Uma pessoa realizou uma pesquisa com alguns alunos de uma escola, coletando suas idades, e organizou esses dados no gráfico.



Qual é a média das idades, em ano, desses alunos?

- a) 9
- b) 12
- c) 18
- d) 19
- e) 27

○ 43. (ENEM) Em um estudo realizado pelo IBGE em quatro estados e no Distrito Federal, com mais de 5 mil pessoas com 10 anos ou mais, observou-se que a leitura ocupa, em média, apenas seis minutos do dia de cada pessoa. Na faixa de idade de 10 a 24 anos, a média diária é de três minutos. No entanto, no grupo de idades entre 24 e 60 anos, o tempo médio diário dedicado à leitura é de 5 minutos. Entre os mais velhos, com 60 anos ou mais, a média é de 12 minutos.

A quantidade de pessoas entrevistadas de cada faixa de idade seguiu a distribuição percentual descrita no quadro.

Faixa etária	Percentual de entrevistados
De 10 a 24 anos	x
Entre 24 e 60 anos	y
A partir de 60 anos	x

Disponível em: www.oglobo.globo.com. Acesso em: 16 ago. 2013 (adaptado).

Os valores de x e y do quadro são, respectivamente, iguais a:

- a) 10 e 80.
- b) 10 e 90.
- c) 20 e 60.
- d) 20 e 80.
- e) 25 e 50.

○ 44. (ENEM) A demografia médica é o estudo da população de médicos no Brasil nos aspectos quantitativo e qualitativo, sendo um dos seus objetivos fazer projeções sobre a necessidade da formação de novos médicos. Um desses estudos gerou um conjunto de dados que aborda a evolução do número de médicos e da população brasileira por várias décadas. O quadro apresenta parte desses dados.

Ano	Médicos	População brasileira (em milhar)
1990	219 000	147 000
2000	292 000	170 000
2010	365 000	191 000

Segundo uma projeção estatística, a variação do número de médicos e o da população brasileira de 2010 para 2020 será a média entre a variação de 1990 para 2000 e a de 2000 para 2010. Com o resultado dessa projeção, determina-se o número de médicos por mil habitantes no ano de 2020.

Disponível em: www.cremesp.org.br. Acesso em: 24 jun. 2015 (adaptado)

O número, com duas casas na parte decimal, mais próximo do número de médicos por mil habitantes no ano de 2020 seria de:

- a) 0,17
- b) 0,49
- c) 1,71
- d) 2,06
- e) 3,32



GABARITO

• Habilidades à prova

Unidade 1

1. D	10. C	19. B	28. B
2. D	11. E	20. D	29. D
3. C	12. D	21. D	30. B
4. D	13. D	22. D	31. D
5. B	14. D	23. B	32. B
6. C	15. D	24. C	33. D
7. D	16. A	25. D	
8. E	17. D	26. A	
9. B	18. D	27. E	

Unidade 2

1. C	15. D	29. A	43. A
2. B	16. C	30. B	44. E
3. E	17. A	31. B	45. D
4. E	18. D	32. A	46. A
5. A	19. D	33. C	47. B
6. D	20. D	34. A	48. D
7. C	21. D	35. C	49. B
8. B	22. B	36. D	50. C
9. E	23. C	37. B	51. B
10. C	24. A	38. C	52. E
11. B	25. E	39. E	53. D
12. A	26. C	40. C	54. C
13. A	27. A	41. A	55. B
14. A	28. D	42. B	

Unidade 3

1. E	12. B	23. E	34. D	45. D
2. E	13. D	24. A	35. B	46. E
3. C	14. B	25. C	36. D	47. C
4. A	15. A	26. E	37. C	48. A
5. D	16. B	27. D	38. B	49. D
6. B	17. B	28. E	39. D	50. E
7. A	18. C	29. E	40. D	51. B
8. B	19. E	30. A	41. B	
9. B	20. A	31. C	42. E	
10. D	21. D	32. E	43. E	
11. A	22. C	33. E	44. B	

Unidade 4

1. D	9. E	17. A	25. B	33. C	41. A
2. D	10. C	18. D	26. A	34. B	42. E
3. E	11. C	19. E	27. C	35. D	43. C
4. D	12. C	20. E	28. D	36. D	
5. A	13. D	21. B	29. E	37. E	
6. A	14. E	22. C	30. C	38. E	
7. B	15. B	23. C	31. D	39. A	
8. D	16. C	24. E	32. B	40. C	

Unidade 5

1. E	11. A	21. B	31. C	41. D	51. B
2. B	12. D	22. D	32. D	42. A	52. E
3. C	13. A	23. E	33. C	43. C	53. D
4. E	14. A	24. B	34. A	44. D	54. C
5. D	15. B	25. C	35. E	45. E	55. C
6. C	16. B	26. B	36. A	46. E	56. D
7. C	17. C	27. A	37. B	47. C	
8. B	18. C	28. E	38. D	48. C	
9. D	19. C	29. A	39. B	49. C	
10. B	20. A	30. D	40. B	50. E	

Unidade 6

1. B	9. B	17. C	25. D	33. C	41. B
2. D	10. B	18. B	26. D	34. B	42. D
3. A	11. B	19. D	27. B	35. D	43. B
4. D	12. E	20. A	28. C	36. B	44. B
5. A	13. B	21. A	29. B	37. C	
6. D	14. B	22. D	30. E	38. B	
7. B	15. B	23. D	31. D	39. A	
8. B	16. B	24. D	32. C	40. B	

